ORSAY
Série A
N° 1174

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 9032

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES

PAR

Claude DARZENS

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA SYMÉTRIE CHIRALE ET QUANTIFICATION SUR LE CONE DE LUMIÈRE DES LAGRANGIENS DE YANG-MILLS

Soutenue le 2 Octobre 1973 devant la commission d'examen

MM. Ph. MEYER — Président

Cl. BOUCHIAT
A. CHAKRABARTI
L. MICHEL
— Examinateurs

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544720_0008

ORSAY
Série A
N° 1174

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 9032

THÈSE

PRÉSENTÉE

A L'UNIVERSITÉ PARIS SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES

PAR

Claude DARZENS

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA SYMÉTRIE CHIRALE ET QUANTIFICATION SUR LE CONE DE LUMIÈRE DES LAGRANGIENS DE YANG-MILLS

Soutenue le 2 Octobre 1973 devant la commission d'examen

MM. Ph. MEYER — Président

Cl. BOUCHIAT
A. CHAKRABARTI
L. MICHEL
— Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

REMERCIEMENTS

Je remercie Monsieur le Professeur Philippe Meyer d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et Monsieur le Professeur Claude Bouchiat d'avoir bien voulu en faire partie. Je leur suis également reconnaissant des conseils et suggestions qu'ils m'ont apportés lors de plusieurs discussions.

Je remercie Monsieur le Professeur Louis Michel qui m'a apporté son aide inestimable et décisive à divers instants critiques de l'élaboration de ce travail.

Amithaba Chakrabarti a apporté sa collaboration à une grande partie de ce travail et a suivi constamment sa progression en consacrant généreusement son temps et ses efforts à me sortir des mauvais pas qui ont parsemé mes débuts de chercheur. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

J'ai plaisir à remercier les chercheurs du Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, notamment Dimitri Fotiadi, Jean Lascoux et Tran N. Truong, pour leur accueil, l'ambiance amicale du Centre et l'aide qu'ils m'ont procurée.

Je suis également reconnaissant à la Délégation Ministérielle à l'Armement qui m'a permis de poursuivre mon travail dans les meilleures conditions par mon détachement à l'Ecole Polytechnique.

Je remercie enfin le secrétariat du Centre de Physique Théorique pour la compétence avec laquelle tous ses membres ont collaboré à la frappe ou l'impression de cette thèse.

TABLE DES MATIERES

PREMIERE PARTIE

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYMETRIES CHIRALES

INTRODUCTION 2

CHAPITRE I - LES SYMETRIES CHIRALES 3

1 - L'algèbre d'observables $SU3^+ \times SU3^-$ 3

2 - La symétrie chirale $SU3^+ \times SU3^-$ 7

Appendice A - Relation de Goldberger-Treiman 12

Appendice B - Théorème de Goldstone 14

Appendice C - Représentations de SU3 et $SU3^+ \times SU3^-$ 18

CHAPITRE II - CASSURE DES SYMETRIES CHIRALES 20

1 - Modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ 22

2 - Longueurs de diffusion pion-pion 23

3 - Le terme σ du nucléon 25

4 - Autres représentations 25

5 - Un exemple de contrainte 27

CHAPITRE III - LE GROUPE DES DILATATIONS 29

1 - Les propriétés du courant de dilatation 29

2 - Structure du Hamiltonien 31

3 - Réalisation à la Goldstone 33

4 - Les dilatations en théorie des perturbations 33

CHAPITRE IV - LES LAGRANGIENS NON LINEAIRES 35

1 - Le modèle σ 35

2 - Les représentations non linéaires 38

3 - L'approximation des graphes en arbre 41

REFERENCES 43

ARTICLE N° 1 - ANNALS OF PHYSICS 69, 47 (1972) 47

ARTICLE N° 2 - ANNALS OF PHYSICS 76, 72 (1973) 72

DEUXIEME PARTIE

QUANTIFICATION LUMIERE DES LAGRANGIENS DE YANG-MILLS

INTRODUCTION 88

CHAPITRE I - LE LAGRANGIEN GENERAL DE YANG-MILLS 90

1 - Invariance de jauge locale 90

2 - Choix du Lagrangien 93

CHAPITRE II - QUANTIFICATION LUMIERE DU LAGRANGIEN DE YANG-MILLS 96

1 - Quantification sur un plan tangent au cône de lumière 96

2 - Quantification du Lagrangien 99

Appendice - Matrices γ^{μ} 105

CHAPITRE III - MECANISME DE HIGGS-KIBBLE ET CALCUL EN PERTURBATION DE LA MATRICE S 106

1 - Calcul du Hamiltonien 106

2 - Etude du Hamiltonien libre 110
a - Bosons de jauge 110
b - Scalaires 111
c - Fermions 112
d - Les opérateurs dans le schéma d'interaction 113
3 - Calcul en perturbation 116

CHAPITRE IV - MISE EN ORDRE PAR RAPPORT A τ DES REGLES DE FEYNMAN 121
1 - Choix de la jauge 121
2 - Règles de Feynman 122
3 - Règles de Feynman τ ordonnées 126
4 - Equivalence des règles de Feynman τ ordonnées et de la quantification lumière
a - Equivalence formelle 129
b - Méthode de T. M. Yan 133
Appendice - Invariance de jauge : Jauge $A_n = 0$ et jauge unitaire 136

CHAPITRE V - REGULARISATION DES THEORIES DE YANG-MILLS ET EQUIVALENCE 143
1 - Introduction 143
2 - Régularisation 145
3 - Graphes de masse propre : méthode covariante 146
4 - Equivalence avec la méthode non-covariante 149
5 - Modèle de Weinberg : contribution du boson scalaire au moment magnétique anormal 152
a - Formalisme du cône de lumière 152
b - Méthode fonctionnelle : jauge unitaire 156
Conclusion 157

CHAPITRE VI - POLARISATION ET CONE DE LUMIERE 159

REFERENCES 174

***

P R E M I E R E P A R T I E

CONTRIBUTION A L'ETUDE DES SYMETRIES CHIRALES

INTRODUCTION

Nous allons étudier dans les articles 1 et 2 quelques aspects de la cassure semi-forte de la symétrie chirale des interactions fortes, mais nous présenterons tout d'abord dans les quatre chapitres suivants quelques concepts et techniques que nous y utiliserons. La proximité généralement admise d'une invariance chirale du monde hadronique a posé le problème, toujours en suspens, de caractériser la partie du Hamiltonien qui ne respecte pas cette invariance. Le peu de connaissances que nous avons sur le mécanisme des interactions fortes nous oblige à aborder la question de façon empirique, guidés par des critères de simplicité (modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$), ou en essayant d'appliquer quelque principe dont la valeur a été reconnue ailleurs. C'est cette voie que nous choisirons dans les deux travaux présentés.

Dans un premier chapitre, nous rappelons les notions essentielles de la symétrie SU3 $\times$ SU3 dans son application au monde des hadrons. Un caractère essentiel de celle-ci est d'être réalisée à la Goldstone par l'intermédiaire de l'octet pseudo-scalaire, qui acquiert une masse du fait de la cassure de la symétrie.

Ayant ainsi posé le décor de notre travail, nous passerons en revue dans le second chapitre les divers modèles de cassure qui ont été utilisés, notamment le modèle $(3,\bar{3})+(\bar{3},3)$ qui est le premier et le plus esthétique, avant de présenter la direction d'étude que nous avons choisie et qui est l'exploitation d'idées développées récemment par Michel et Radicati.

Dans le chapitre suivant, nous ferons une courte revue de la symétrie dite d'échelle ou de dilatation que nous utiliserons afin d'obtenir une contrainte sur le Hamiltonien hadronique, et qui nous permettra de discuter un modèle présenté dans le premier article.

Dans le second article, nous testerons une série de modèles par le calcul des longueurs de diffusion méson-méson, grâce à une technique commode dite des Lagrangiens non linéaires (ou phénomènologiques, ou effectifs) ; aussi en ferons-nous un résumé dans le dernier chapitre en indiquant les liens avec la symétrie "à la Goldstone".

Chapitre I

LES SYMETRIES CHIRALES

La symétrie chirale SU3 × SU3 couvre en fait, sous une même dénomination, deux tentatives de compréhension, logiquement indépendantes, mais historiquement liées, de certains aspects des interactions fortes, électromagnétiques et faibles.

La première formulation s'effectue en postulant une algèbre d'observables [1,2] ; nous ne l'utiliserons qu'indirectement, mais la passerons en revue cependant, du fait des liens avec la deuxième formulation. Son énoncé est très précis, mais elle est difficile à tester sans hypothèses supplémentaires qui lui ajoutent une marge de souplesse importante et la rendent difficile à distinguer de la formulation suivante.

Cette seconde formulation [3], à laquelle nous adhèrerons dans les deux travaux suivants, exploite l'idée d'une symétrie approchée du monde hadronique. Elle est moins restrictive que la précédente, et en fait a pour conséquence celle-ci dans les modèles usuels. Son énoncé est moins précis et plus empirique, mais par cela même lui permet de se plier à la situation expérimentale tout en exploitant certains concepts et techniques qui ont fait preuve de leur valeur.

1.- L'ALGEBRE D'OBSERVABLES $SU3^+ \times SU3^-$

Les interactions faibles des hadrons avec les leptons ainsi que leurs interactions électromagnétiques permettent de mesurer les éléments de matrice entre hadrons d'opérateurs vectoriels et axiaux appelés courants.

Ces courants ont un caractère tensoriel par SU3 fixé par la théorie de Cabibbo [4] :

$$J^{\mu}_{E.M.} = V^{\mu}_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} V^{\mu}_8 \qquad (1)$$

$$J^{\mu}_W = \cos\theta \left[(V_1 + iV_2)^{\mu} - (A_1 + iA_2)^{\mu}\right] + \sin\theta \left[(V_4 + iV_5)^{\mu} - (A_4 + iA_5)^{\mu}\right.$$

Les interactions électromagnétiques sont données, à tous les ordres de la constante électromagnétique e, par :

$$\mathcal{L}_{E.M.}(x) = - e\, A_\mu(x)\, J^\mu_{E.M.}(x) \ . \tag{2}$$

Les interactions faibles avec les leptons sont données par un lagrangien effectif :

$$\mathcal{L}_W(x) = - \frac{G}{\sqrt{2}}\ \ell_\mu(x)\, J^{\mu\,\dagger}_W(x) + h.c \tag{3}$$

$\ell_\mu(x)$ est le courant faible leptonique. (Ce lagangien effectif décrirait par exemple ces interactions à tous les ordres de la constante de couplage d'un boson intermédiaire hypothétique).

Les directions $6^{\pm}$ i7, conservant la charge, ne jouent aucun rôle connu. On doit ajouter que l'expérimentation actuelle est compatible avec la théorie de Cabibbo, mais non concluante ; certaines conséquences restent à tester, notamment dans les expériences à neutrino.

Gell-Mann [1] a postulé que les composantes temps des courants formaient une algèbre $SU3^+ \times SU3^-$, c'est-à-dire satisfaisaient aux relations de commutation suivantes à chaque instant:

$$\left[V^o_i(x),\ V^o_j(y)\right]_{x^o=y^o} = i\ \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\ f_{ijk}\ V^o_k(x)$$

$$\left[V^o_i(x),\ A^o_j(y)\right]_{x^o=y^o} = i\ \delta^3\ (\vec{x} - \vec{y}) f_{ijk}\ A^o_k(x)$$

$$\left[A^o_i(x),\ A^o_j(y)\right]_{x^o=y^o} = i\ \delta^3\ (\vec{x} - \vec{y}) f_{ijk}\ V^o_k(x) \tag{4}$$

A strictement parler, l'algèbre $SU3^+ \times SU3^-$ est formée par les charges :

$$Q_i(x^o) = \int d^3x\ V^o_i(x)$$

$$Q^5_i(x^o) = \int d^3x\ A^o_i(x) \tag{5}$$

dont les combinaisons :

$$\overset{\pm}{Q}_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_i \pm Q_i^5) \qquad (6)$$

ont les relations de commutation, découlant de (4) par intégration :

$$\left[\overset{\pm}{Q}_i(x^o), \overset{\pm}{Q}_j(x^o)\right] = i f_{ijk} \overset{\pm}{Q}_k(x^o)$$

$$\left[Q_i^+(x^o), Q_j^-(x^o)\right] = 0 \ . \qquad (7)$$

Cette algèbre est cependant moins restrictive que la forme locale (4).

Les relations de commutation (4,7) sont non linéaires, et elles ont une conséquence importante; on peut vérifier à partir de celles-ci que les charges faibles hadroniques :

$$\frac{1}{2} \int d^3x \, J_W^o(x), \ \frac{1}{2} \int d^3x \, J_W^{o\dagger}(x)$$

avec la quantité :

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int d^3x \, J_W^o(x), \ \frac{1}{2} \int d^3x \, J_W^{o\dagger}(x)\right] \qquad (8)$$

ont les relations de commutation de l'algèbre de Lie de SU2 (comme les charges faibles leptoniques). Leur non-linéarité fixe l'échelle des courants faibles et donne ainsi un sens à l'universalité de la constante faible G apparaissant dans (3).

Tests de l'algèbre des courants [2]

En prenant les relations de l'algèbre (4), intégrées ou non, entre états initial et final et en intercalant dans le commutateur un ensemble complet d'états, on obtient des règles de somme reliant des quantités en principe mesurables. Cependant les données expérimentales actuelles sur les interactions semi-leptoniques interdisent une vérification directe de ces relations.

D'autre part, la définition des charges $Q_i(x^o)$ et $Q_i^5(x^o)$ montre que les charges commutent avec les générateurs des translations d'es-

pace P_i mais non de temps P_o (sauf dans le cas Q_i, i = 1, 2, 3, si l'on néglige les interactions faibles et électromagnétiques). Ces charges ont alors des éléments de matrice entre états de même triimpulsion, mais pas de même énergie, donc de masse différente, et ce fait rend ces règles de somme très compliquées. On pallie cette difficulté en les prenant dans un repère de moment infini (moyennant une hypothèse mathématique supplémentaire) [5].

Citons comme exemple la règle de somme d'Adler [6] obtenue à partir du commutateur:

$$[Q_1^5 + iQ_2^5,\ Q_1^5 - iQ_2^5] = 2\ Q_3 \qquad (9)$$

qui relie le quotient g_A des constantes de couplage axiale et vectorielle mesurées dans la désintégration β à une intégrale sur la différence des sections efficaces différentielles totales νP et $\bar{\nu} P$.

En pratique, on doit utiliser l'hypothèse PCAC, dominance de la divergence axiale faible $\partial_\mu (A_1 \pm iA_2)^\mu$ par le pôle du pion (Partially conserved axial current) pour évaluer certaines de ces règles de somme et obtenir des relations entre quantités accessibles à l'expérimentation actuelle. Mais alors les corrections à PCAC sont difficiles à évaluer et ce que l'on teste n'est plus clair : Algèbre des courants ou proximité d'une symétrie chirale $SU3^+ \times SU3^-$ du Lagrangien. Nous reviendrons à cette question dans le paragraphe suivant. Citons comme exemple d'utilisation de cette technique la règle de somme d'Adler-Weisberger [7], dérivée encore à partir de (9).

Signalons pour finir diverses directions suivies dans les développements de l'algèbre des courants.

Sugawara [8] a tenté de prendre comme champs de base d'une théorie quantique les quantités observables $V_i^\mu(x)$ et $A_i^\mu(x)$. Dans une telle théorie, le tenseur d'énergie-impulsion s'exprime en fonction des courants cependant, cette tentative présente des difficultés auxquelles nous reviendrons dans le chapitre suivant.

Les règles de somme déduites de l'algèbre des courants saturée par des états à une particule dans un repère d'impulsion infinie, donnent une réalisation linéaire du groupe SU3 × SU3 qui impose des restrictions au spectre des particules et aux facteurs de forme. Cet aspect a été considéré dans les travaux de Dashen et Gell-Mann [9]. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'une réalisation algébrique des symétries chirales conduisant à ces règles de somme est obtenue dans un contexte différent par Weinberg [10].

Indiquons enfin le lien entre les règles de somme dans un repère de moment infini et la quantification d'une théorie sur le cône de lumière [11], ainsi que la généralisation bilocale de l'algèbre des courants par Fritzsch et Gell-Mann [12] au voisinage de ce cône de lumière.

Rappelons en conclusion de ce paragraphe, que l'algèbre des courants a été abstraite par Gell-Mann à partir du modèle des quarks , et pourrait donc être liée à une telle structure fondamentale des particules. Bien que l'on n'ait pas de confirmation expérimentale (ni d'infirmation d'ailleurs) de cette algèbre, ce lien en fait une hypothèse séduisante de travail dans l'étude de la symétrie chirale.

2.- LA SYMETRIE CHIRALE $SU3^+ \times SU3^-$

Dans ce type d'approche, on considère que le monde hadronique est voisin de l'invariance par un groupe de symétrie $SU3^+ \times SU3^-$. Plus particulièrement, on suppose que le Hamiltonien se scinde en deux parties

$$H^{Had.} = H_o + \varepsilon H_1 \qquad (10)$$

H_o étant invariant par $SU3^+ \times SU3^-$, tandis que εH_1 brise cette invariance. Nous adhérons ainsi à la possibilité de développer la matrice S par rapport à une quantité petite, visualisée par ε (lequel ne doit être considéré que comme une notation commode), dans la méconnaissance où nous sommes du mécanisme de cette cassure de la symétrie.

Nous allons nous placer dans ce paragraphe dans un monde idéal

invariant par $SU3^+ \times SU3^-$, réservant au chapitre suivant l'étude du terme εH_1.

Cette symétrie chirale combine la symétrie SU3 habituelle avec un mécanisme dit de cassure spontanée du vide que nous allons décrire dans le cadre de $SU2^+ \times SU2^-$ avant de passer à $SU3^+ \times SU3^-$. Nous réserverons à un appendice la démonstration du théorème de Goldstone qui gouverne cette cassure spontanée du vide.

a.- $\underline{SU2^+ \times SU2^-}$

Cette symétrie donne une explication naturelle du succès de la dominance de $\partial_\mu A^\mu_{\pm}(x)$ par le pôle du pion (PCAC), telle qu'on l'utilise dans la dérivation de la relation de Goldberger-Treiman [13,14] et des théorèmes de pions mous [2].

Nous donnons en appendice une dérivation de la relation de Goldberger-Treiman qui illustre ce fait. Son interprétation est que les divergences axiales $\partial_\mu (A_1 \pm iA_2)^\mu$ tendraient vers zéro dans un monde imaginaire où l'on pourrait faire tendre m_π^2 vers zéro. La faible masse du pion dans notre univers traduit ainsi la presque conservation des courants axiaux $(A_1 \pm i A_2)^\mu$ et la commutation approximative du Hamiltonien hadronique avec les charges axiales $Q_1^5 \pm iQ_2^5$.

Nous avons donc un Hamiltonien commutant avec Q_i, (i = 1,2,3), engendrant le groupe d'isospin que l'on sait un bon groupe de symétrie, et un triplet de charges Q_i^5, (i = 1,2,3), la composante Q_3^5 étant déduite par transformation d'isospin de $Q_1^5 \pm iQ_2^5$. A ce point, si l'on veut fermer l'algèbre des charges Q_i et Q_i^5 sans nouvel opérateur, c'est-à-dire obtenir les commutateurs $[Q_i^5, Q_j^5]$, on a le choix entre les algèbres $SU2^+ \times SU2^-$, O(4) et O(3,1) [15]. Les conséquences expérimentales qu'on en déduit alors tranchent en faveur de $SU2^+ \times SU2^-$:

$$[Q_i, Q_j] = i\, \varepsilon_{ijk}\, Q_K$$

$$[Q_i, Q_j^5] = i\, \varepsilon_{ijk}\, Q_K^5$$

$$[Q_i^5, Q_j^5] = i\, \varepsilon_{ijk}\, Q_K \qquad (11)$$

ou :

$$\left[Q_i^{\pm}, Q_j^{\pm}\right] = i\, \epsilon_{ijk}\, Q_K^{\pm}$$

$$\left[Q_i^{+}, Q_j^{-}\right] = 0$$

avec :

$$Q_i^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_i \pm Q_i^5\right)$$

que l'on étend souvent à la forme locale :

$$\left[V_i^o(x), V_j^o(y)\right] = i\, \epsilon_{ijk}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\, V_k^o(y)$$

$$\left[V_i^o(x), A_j^o(y)\right] = i\, \epsilon_{ijk}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\, A_K^o(y)$$

$$\left[A_i^o(x), A_j^o(y)\right] = i\, \epsilon_{ijk}\, \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\, V_K^o(y) \qquad (12)$$

Si nous supposons acquise la symétrie $SU2^+ \times SU2^-$ de H_o, il reste à spécifier son mode de réalisation sur les états physiques. En effet, les particules se groupent en représentations de $SU2^d$, mais ne montrent pas de réalisation du groupe $SU2^+ \times SU2^-$. Nous nous trouvons ici en présence d'un phénomène de cassure spontanée du vide, ou de réalisation "à la Goldstone" d'une symétrie. C'est la traduction quantique d'un phénomène connu dans d'autres branches de la physique. Le Hamiltonien bien qu'invariant par un groupe G, possède une solution de plus basse énergie invariante seulement par un sous-groupe H de G : citons le cas de la physique nucléaire où un noyau (possédant un nombre pair de nucléons) peut se trouver dans un état fondamental $J \neq 0$ et avoir pour symétrie O(1) et non O(3) de son Hamiltonien. Dans le cas d'une théorie quantique des champs où les états sont construits à partir de cet état d'énergie minimale qu'est le vide, ceux-ci ne donnent de représentation linéaire que du sous-groupe laissant le vide invariant. Les autres éléments du groupe sont réalisés de façon non linéaire.

Si nous notons $e^{i\alpha Q}$ un tel élément avec $\left[Q, \Phi(x)\right] = \delta\Phi(x)$ l'égalité $< 0 \mid \left[Q, \Phi(x)\right] \mid 0 > = < 0 \mid \delta\Phi(x) \mid 0 >$ montre que l'on peut avoir soit une non inva-

riance du vide par Q et une réalisation linéaire de Q, mais avec certains champs ayant des valeurs moyennes sur le vide non nulles, soit une réalisation non linéaire de Q sur les champs $\Phi(x)$ (cas que nous examinerons dans le troisième chapitre). Dans un appendice, nous donnons une démonstration du théorème de Goldstone qui explicite ce fait.

b.- $\underline{SU3^+ \times SU3^-}$

Il est maintenant naturel en passant du groupe d'isospin au groupe SU3 d'étendre la symétrie approximative $SU2^+ \times SU2^-$ à $SU3^+ \times SU3^-$, et de postuler les relations de commutation :

$$\left[Q_i^{\pm}, Q_j^{\pm}\right] = i\, f_{ijk}\, Q_K^{\pm}$$

$$\left[Q_i^{+}, Q_j^{-}\right] = 0 \qquad (i = 1,2\ldots8) \qquad (13)$$

ou éventuellement sous l'équivalent de la forme locale (12). Notons qu'à la différence de (4), elles ne dépendent pas de x^o et sont supposées vraies dans un univers où m_π^2, m_K^2 et m_η^2 tendent vers zéro. Les masses m_K^2 et m_η^2 étant plus importantes que m_π^2 indiquent qu'on est plus proche d'une symétrie $SU2 \times SU2$ que d'une symétrie $SU3 \times SU3$. L'octet pseudo-scalaire est considéré comme un octet de bosons de Goldstone correspondant aux 8 générateurs Q_i^5, et prenant une masse par le mécanisme de cassure représenté par εH_1.

Pour aller plus loin dans la discussion, on doit se donner des hypothèses sur εH_1, ce que nous ferons dans le chapitre 2.

On remarque que lorsque εH_1 ne contient pas de couplages dérivatifs, les relations de commutation des courants ne sont pas modifiées par εH_1 et qu'un tel modèle donnerait donc l'algèbre des courants.

Un autre lien avec l'algèbre des courants est la dérivation par Weinberg [10] de règles de sommes algébriques *(page suivante) telles que celles déduites par Dashen et Gell-Mann dont nous avons parlé.

Elles sont déduites, par exemple, dans le contexte des lagran-

giens non linéaires en imposant aux amplitudes évaluées à l'approximation des graphes en arbre de ne pas croître plus rapidement à haute énergie que les amplitudes réelles.

* * *

---

* Weinberg oppose les symétries algébriques, réalisées linéairement, telles qu' invariance de Lorentz ou Isospin aux symétries dynamiques telles qu'invariance de jauge locale ou réalisations non linéaires de symétrie chirale qui ne se traduisent pas par la conservation de nombres quantiques.

APPENDICE A

RELATION DE GOLDBERGER TREIMANN [16]

La constante de désintégration du pion étant définie par :

$$< 0 \mid (A_1 + i\, A_2)^{\mu} \mid \pi^- > = i\, f_\pi\, p_\mu^\pi \qquad (A.1)$$

et les facteurs de forme de la désintégration β par :

$$< P \mid (A_1 + iA_2)^{\mu} \mid N> = \bar{u}(p_P) \left[G_1(q^2)\, \gamma^5 \gamma^\mu + G_2(q^2)\, \gamma^5\, \sigma^{\mu\nu}(p_N - p_P)_\nu \right.$$

$$\left. + G_3(q^2)\, \gamma^5 (p_N - p_P)^\mu \right] u(p_N) \qquad (A.2)$$

avec $q^2 = (p_N - p_P)^2$

prenant la divergence de (2) on obtient :

$$i < P \mid \partial_\mu (A_1 + iA_2)^{\mu} \mid N > = \bar{u}(p_P)\, G(q^2)\, \gamma^5\, u(p_N)$$

avec $G(q^2) = (m_P + m_N)\, G_1(q^2) + q^2\, G_3(q^2)$.

Au seuil :

$$G(0) = \frac{G_A}{G_V} (m_P + m_N) \simeq 1{,}18\ (m_P + m_N)$$

nous écrivons maintenant une relation de dispersion pour le facteur de forme $G(q^2)$ en tenant compte du pôle du pion. La coupure commence à $(3m_\pi)^2$ (ou légèrement en dessous du fait des seuils anormaux):

$$G(q^2) = \frac{f_\pi\, m_\pi^2\, G_{NN\pi}\sqrt{2}}{q^2 - m_\pi^2} + \frac{1}{2\,\pi\, i} \int_{9m_\pi^2}^{\infty} \frac{\mathrm{disc}\, G(s)}{s - q^2}\, ds, \qquad (A.3)$$

$\sqrt{2}\, G_{NN\pi}$ est la constante de couplage $PN\pi^+$.

On obtient la relation de Goldberger-Treiman à $q^2 = 0$ si l'on ignore la contribution de l'intégrale :

$$G(0) = (m_P + m_N)\, \frac{G_A}{G_V} = f_\pi \sqrt{2}\, G_{NN\pi} \qquad (A.4)$$

Expérimentalement cette relation est vérifiée à 10% près.

Mais il reste à justifier la petitesse de la contribution de l'intégrale sur la coupure devant le terme de pôle. La distance de la coupure de $9m_\pi^2$ n'est pas suffisante pour justifier la petitesse de cette contribution face à la contribution du pôle elle-même de l'ordre de m_π^2, on doit donc supposer que disc G(s) est elle-même de l'ordre de m_π^2.

Mais alors $G(q^2)$ est de l'ordre de m_π^2 et tend vers zéro avec m_π^2 et par conséquent $\partial_\mu (A_1 + iA_2)^\mu$ également.

La proximité d'une symétrie chirale $SU2^+ \times SU2^-$ qui implique $\partial_\mu (A_1 + iA_2)^\mu = 0$ donne ainsi une explication naturelle au succès de la relation de Goldberger-Treiman.

* * *

APPENDICE B

THEOREME DE GOLDSTONE

Ce théorème, conjecturé par Goldstone [17], a été démontré par Goldstone, Salam et Weinberg [18]. Nous allons donner la démonstration de Jona Lasinio [19] qui utilise la fonctionnelle génératrice des vertex propres, particulièrement bien adaptée à traiter les phénomènes de cassure spontanée du vide. Nous allons tout d'abord en donner les traits essentiels [20].

1.- LA FONCTIONNELLE GENERATRICE DES VERTEX PROPRES

Nous considèrons un lagrangien $\mathcal{L}(\Phi_i(x), \partial_\mu \Phi_j(x))$ décrivant l'évolution de champs $\Phi_i(x)$. Nous ajoutons à ce lagrangien une interaction avec des sources extérieures, $J_i(x)$ étant des fonctions ordinaires:

$$\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(x) + \Phi_i(x)\ J_i(x) \tag{B.1}$$

$\mathcal{L}'(x)$ décrit maintenant l'évolution des champs $\Phi_i(x)$ soumis aux sources $J_i(x)$.

Prenant comme lagrangien non perturbé $\mathcal{L}(x)$ et comme perturbation $\Phi_i(x)\ J_i(x)$, la formule de Dyson donne la matrice S_J :

$$S_J = \mathrm{Texp}\ \ i \int d^4x\ J_i(x)\ \Phi_i(x) \tag{B.2}$$

qui permet d'obtenir la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green :

$$Z[J] = \langle 0 \mid \mathrm{Texp}\ i \int d^4x\ \Phi_i(r)\ J_i(x) \mid 0 \rangle = \langle 0\ \mathrm{out} \mid 0\ \mathrm{in} \rangle_J \tag{B.3}$$

Par dérivations fonctionnelles successives :

$$\left.\frac{\delta^{(n)} Z[J]}{\delta J_i(x)\ \delta J_j(y) \ldots \delta J_k(z)}\right|_{J_i=0} = \langle 0 \mid T(\Phi_i(x)\ \Phi_j(y) \ldots \Phi_k(z)) \mid 0 \rangle \tag{B.4}$$

Les champs $\Phi_i(x)$ sont les champs de Heinsenberg correspondant à $\mathcal{L}(x)$.

Soit :

$$Z[J] = \sum_n \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, \langle 0 | T(\Phi_{i_1}(x_1) \ldots \Phi_{i_n}(x_n)) | 0 \rangle J_{i_1}(x_1) \ldots J_{i_n}(x_n) \tag{B.5}$$

On vérifie que la fonctionnelle $W[J]$

$$W[J] = -i \, \mathrm{Log} \, Z[J] \tag{B.6}$$

engendre les fonctions de Green connexes

$$\left. \frac{\delta^{(n)} W[J]}{\delta J_{i_1}(x_1) \ldots \delta J_{i_k}(x_n)} \right|_{J_i = 0} = \langle 0 | T(\Phi_{i_1}(x_1) \ldots \Phi_{i_n}(x_n) | 0 \rangle_{\text{connexe}} \tag{B.7}$$

La relation fonctionnelle :

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J_i(x)} = \langle 0 | \Phi_i(x) | 0 \rangle = \varphi_i(x) \tag{B.8}$$

définit implicitement les $\{J_i(x)\}$ en fonction des $\{\varphi_i(x)\}$. Nous devrions dans cette relation indexer les Φ_i, φ_i par J.

La fonctionnelle désirée $A[\varphi]$ est alors obtenue par la transformation de Legendre :

$$A[\varphi] = W[J] - \int d^4x \, \varphi_i(x) \, J_i(x) \tag{B.9}$$

Par dérivation fonctionnelle, on obtient :

$$\frac{\delta A[\varphi]}{\delta \varphi_i(y)} = \frac{\delta W[J]}{\delta \varphi_i(y)} - \int d^4x \, \frac{\delta J_j(x)}{\delta \varphi_i(y)} \, \varphi_j(x) - \int d^4x \, \delta(x - y) \, J_i(x)$$

Compte tenu de $\varphi_j(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J_j(x)}$, les deux premiers termes du second membre s'annulent et il reste :

$$\frac{\delta A[\varphi]}{\delta \varphi_i(y)} = - J_i(y) \tag{B.10}$$

On vérifie alors par le calcul que $A[\varphi]$ engendre par dérivations fonctionnelles successives par rapport aux $\varphi_i(x)$ les vertex propres $\Gamma_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)$, (vertex ne pouvant être séparés en deux parties disconnectées par coupure d'une ligne interne), appelés aussi vertex une-particule irréductible.

$$A[\varphi] = \int d^4x_1 \ldots d^4x_n \, \Gamma_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) \, \varphi_{i_1}(x_1) \ldots \varphi_{i_n}(x_n) \qquad (B.11)$$

2.- LE THEOREME DE GOLDSTONE

La propriété essentielle qui nous intéresse est la relation (B.10) qui réduit à la recherche d'un extremum de la fonctionnelle $A[\varphi]$ le calcul des valeurs moyennes sur le vide des champs $\Phi_i(x)$ prises pour $J_i = 0$, c'est-à-dire des champs de Heisenberg de $\mathcal{L}(x)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{L}(x)$ soit invariant par l'action d'un groupe G, les Φ_i étant placées dans une représentation linéaire de G.

On dit su'il y a cassure spontanée du vide lorsque :

$$\frac{\delta A[\varphi]}{\delta \varphi_i(x)} = 0 \qquad (B.12)$$

admet une solution $\{\varphi_i(x)\}$ différente de zéro, en fait constante $\{\lambda_i\}$ si l'on tient compte de l'invariance par translation du vide que l'on veut conserver.

Soit une variation infinitésimale des $\varphi_i(x)$, $T_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon t_{ij}$, correspondant à un générateur Q du groupe G. L'accroissement correspondant des J_i est :

$$\delta J_i(x) = \int d^4y \, \frac{\delta J_i(x)}{\delta \varphi_j(y)} \, \delta \varphi_j(y) = - \int d^4y \, \frac{\delta^2 A[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \, \delta \varphi_j(y)} \, \varepsilon t_{jk} \, \varphi_k(y) \qquad (B.13)$$

A la limite $J_i(x) = 0$, $\varphi_k(y) = \lambda_k$, il vient :

$$\int d^4y \, \frac{\delta^2 A[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \, \delta \varphi_j(y)} \, t_{jk} \lambda_k = 0 \qquad (B.14)$$

Or, par dérivation fonctionnelle de (10) par rapport à $J_i(x)$, on voit facilement que :

$$\int d^4y \, \frac{\delta^2 A[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \, \delta \varphi_j(y)} \, \frac{\delta^2 Z}{\delta J_j(z) \, \delta J_i(y)} = - \delta^4(x - y) \qquad (B.15)$$

ce qui montre que $\dfrac{\delta^2 A[\varphi]}{\delta \varphi_i(x) \, \delta \varphi_j(y)}$ est l'inverse du propagateur changé de signe.

(B.14) devient ainsi :

$$\Delta^{-1}_{ij}\ (p = 0)\ t_{jk}\ \lambda_k = 0 \qquad \text{(B.16)}$$

Cette équation montre qu'à tout générateur Q ne laissant pas $\{\lambda_k\}$ invariant ($t_{jk}\ \lambda_k \neq 0$) correspond une valeur propre nulle de la matrice de masse $\Delta^{-1}_{ij}\ (p = 0)$, et donc une particule de masse nulle.

Ceci constitue le théorème de Goldstone.

L'égalité :

$$< 0 |\ [Q, \Phi_i]\ | 0 > = i\ t_{ij}\ \varphi_j \qquad \text{(B.17)}$$

montre bien que ce générateur Q ne laisse pas le vide invariant.

Nous avons ici considéré une représentation linéaire du groupe G sur les champs $\Phi_i(x)$, certains $\lambda_i = < 0 |\ \Phi_i(x)\ | 0 >$ étant différents de zéro, et nous avons conclu que le vide n'était invariant que par le petit groupe de $\{\lambda_i\}$. Pour ce qui nous concerne, il est plus commode d'utiliser des représentations partiellement non linéaires de G, les éléments du groupe ne laissant pas invariant le vide étant représentés non linéairement sur les champs ; nous examinerons cette question dans le chapitre sur les lagrangiens non linéaires.

* * *

APPENDICE C

1.- REPRESENTATIONS DE SU3

Les représentations de SU3 sont numérotées par deux nombres (λ,μ) qui fixent les valeurs des Casimir, caractérisant par exemple les diagrammes d'Young ou les diagrammes de poids ; mais en ce qui concerne les représentations les plus basses, on préfère souvent les identifier par leur dimension, par exemple 3 pour (1,0), 8 pour (1,1), etc...

Nous nous intéresserons aux représentations suivantes en particulier :

3 C'est la représentation fondamentale de SU3, groupe des matrices unitaires et unimodulaires de dimension 3.

$$u = \exp - i\, \alpha_i\, \lambda_i, \quad (i = 1,\ldots,8)$$

dans la représentation traditionnelle des matrices de Gell-Mann λ_i.

6 ou (2,0). Nous avons décrit dans l'appendice A du premier papier une méthode commode pour manipuler cette représentation.

8 C'est la représentation adjointe de SU3. Dans les calculs pratiques, il est utile d'utiliser la représentation de l'algèbre de Lie dans cet espace $(F_i)_{jk} = -if_{ijk}$, avec :

$$[F_i, F_j] = if_{ijk} F_k$$

2.- REPRESENTATION DE $SU3^+ \times SU3^- \times (1,C,P,CP)$

On s'intéresse aux représentations paires par C et P dans le travail qui nous intéresse.

Les représentations (n,m) donnent (m,n) par parité, qui échange $SU3^+$ et $SU3^-$, et $(\bar{n},\bar{m})$ par conjugaison de charge. (n numérote la représentation de $SU3^+$, m la représentation de $SU3^-$, n et m représentant soit la dimension de la représentation, soit les nombres quantiques (λ,μ)). On

choisira donc les représentations :

$$(n,m) \oplus (m,n) \oplus (\bar{n},\bar{m}) \oplus (\bar{m},\bar{n})$$

(étant entendu que dans le cas $m = \bar{n}$ par exemple, on doit lire $(n,\bar{n}) \oplus (\bar{n},n)$).

Les manipulations sur des représentations (n,m) découlent simplement de celles sur n et m. Cependant, dans le cas de $(3,\bar{3}) \oplus (\bar{3},3)$, il est plus commode de la réaliser sur les matrices x de dimension 3. Notant u_+ et u_- les matrices unitaires unimodulaires de $SU3^+$ et $SU3^-$, x se transforme comme :

$$x \to u_+ \; x \; u_-^\dagger$$

La décomposition habituelle :

$$x = \sum_{i=0}^{8} u_i \lambda_i + v_i \; i \; \lambda_i$$

donne alors :

$$[Q_i, u_j] = i \; f_{ijk} \; u_k$$

$$[Q_i, v_j] = i \; f_{ijk} \; v_k$$

$$[Q_i^5, u_j] = -i \; d_{ijk} \; v_k$$

$$[Q_i^5, v_j] = i \; d_{ijk} \; u_k$$

Les u_i sont pairs par parité, tandis que les v_i sont impairs.

* * *

Chapitre II

CASSURE DES SYMETRIES CHIRALES

La proximité de l'invariance $SU3^+ \times SU3^-$ étudiée dans le chapitre précédent a pour conséquence une série de théorèmes valables à l'ordre zéro en ϵ pour notre univers de hadrons décrit par le Hamiltonien $H_o + \epsilon H_1$. On obtient ainsi des théorèmes dits de pions mous reliant des processus avec un nombre variable de pions (on considère alors ici le sous-groupe $SU2^+ \times SU2^-$, la petite masse du pion suggérant comme nous l'avons vu, que cette symétrie est plus proche).

Ces relations peuvent être déduites directement dans un univers décrit par H_o où le pion a une masse nulle, mais on utilise plutôt la technique des pions mous, où le champ du pion est interpolé pour des valeurs de $q^2 \neq m_\pi^2$ par $\partial_\mu A^\mu_{\pm}(x)$, à un facteur de normalisation près ; l'utilisation de l'algèbre des courants donne alors des relations entre divers éléments de matrice que l'on prend avec une impulsion d'un pion $q^\mu = 0$. Cette technique, qui comporte une variante de PCAC, donne les mêmes résultats. (Nous verrons que les lagrangiens non linéaires donnent une méthode plus mécanique et plus rapide pour obtenir ces relations) [2].

Cependant, on aimerait bien calculer les corrections en ϵ à ces divers théorèmes, notamment dans le cas de processus interdits à l'ordre $O(\epsilon)$. Dans de tels cas interviennent des commutateurs $[Q, \partial_\mu A^\mu_i]$ qui sont de l'ordre de ϵ. En effet, calculant $\frac{dQ^5_i}{dt}$ on obtient :

$$\frac{dQ^5_i}{dt} = \int d^3x\, \partial_\mu A^\mu_i(x) = i \int d^3x \,[\mathcal{L}(x), Q^5_i] = i\,\epsilon \int d^3x\, [\mathcal{H}_1(x), Q^5_i] \qquad (1)$$

$\mathcal{H}(x)$ étant la densité du Hamiltonien :

$$H = \int d^3x\, \mathcal{H}(x) = \int d^3x (\mathcal{H}_o(x) + \epsilon\, \mathcal{H}_1(x)) \qquad (2)$$

la généralisation locale habituelle de (1) donne :

$$\partial_\mu A^\mu_i(x) = i\,[\epsilon\, \mathcal{H}_1(x),\, Q^5_i] \qquad (3)$$

Pour aller plus loin il faut donc spécifier le caractère tenso-

riel de $\varepsilon \mathcal{H}_1(x)$ qui brise la symétrie chirale.

Comme premier exemple de l'utilisation d'un commutateur $[Q, \partial_\mu A_i^\mu]$, nous allons calculer les masses qu'acquièrent les bosons de Goldstone lors de la cassure [21].

Nous utilisons l'identité :

$$q_\lambda q_\mu \int e^{iqx} < 0 | \; T(A_i^\lambda(x) \; A_i^\mu(0))) \; 0 > = \int e^{iqx} < 0 | T(\partial_\lambda A_i^\lambda(x) \; \partial_\mu A_i^\mu(0)) | 0 >$$

$$+ \; i < 0 | [Q_i^5, \; [Q_i^5, \; \varepsilon \mathcal{H}_1(0)]] | 0 > \qquad (4)$$

obtenue en glissant sous le symbole T les dérivations par rapport à x^λ et x^μ. Nous approximons le premier terme du second membre par le pôle du méson :

$$i \; \frac{f_i m_i^2}{\sqrt{2}} \; \frac{1}{q^2 - m_i^2} \; \frac{f_i m_i^2}{\sqrt{2}} \qquad (5)$$

(la constante de désintégration f_i est définie par

$$< 0 | \; A_i^\mu \; | \; M_i > = i \; \frac{f_i}{\sqrt{2}} \; p^\mu)$$

et faisons tendre q^μ vers zéro, ce qui donne :

$$m_i^2 = \frac{2}{f_i^2} < 0 | [Q_i^5, \; [Q_i^5, \; \varepsilon \mathcal{H}_1(0)]] | 0 > + \; O(\varepsilon^2) \qquad (6)$$

La quantité :

$$[Q_i^5, \; [Q_j^5, \; \varepsilon \mathcal{H}_1(0)] = i \; [Q_i^5, \; \partial_\mu A_j^\mu] = \sigma_{ij} \qquad (7)$$

appelée terme σ, joue un rôle important dans l'étude de la cassure chirale.

Comme second exemple, donnons l'expression de l'amplitude $M^{ij}(q)$ de $N + M^i(q) \rightarrow N + M^j(q)$ lorsque $q \rightarrow 0$.

$$M^{ij}(q=0) = \frac{2}{f_i f_j} < N | [Q_i^5, \; [Q_j^5, \; \varepsilon \mathcal{H}_1(0)]] | N > + \; O(\varepsilon^2) \qquad (8)$$

établie de la même façon que précédemment.

1.- MODELE $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ [22]

Le choix le plus simple $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ pour les propriétés tensorielles de εH_1 a été suggéré par Gell-Mann [23] et nous allons esquisser dans ce paragraphe les possibilités de ce modèle et les difficultés afférentes.

Notons tout d'abord les critères généraux auxquels doit satisfaire εH_1. Les interactions fortes sont invariantes par parité et conjugaison de charge, et par conséquent εH_1 également. Ensuite, le succès de la formule de Gell-Mann/Okubo implique que εH_1 doit se comporter par $(SU3)^d$ comme somme d'un scalaire et de la huitième composante d'un octet.

Enfin, on doit minimiser autant que possible les représentations autres que scalaire et octet, telles que 27 par exemple, dans la réduction de la représentation choisie à $(SU3)^d$, puisque l'on n'a aucune évidence actuellement du rôle de nombres quantiques exotiques (c'est-à-dire extérieurs à l'octet dans le cas présent). A ce titre, les représentations $(3,\bar{3})$ et $(1,8)$ qui se décomposent en $1 + 8$ et 8 sont les seules représentations de $SU3 \times SU3$ ne posant pas ce problème.

Dans le cas de $(3,\bar{3})$ on choisit donc (voir appendice pour les notations) :

$$\varepsilon \mathcal{H}_1(x) = u_o(x) + c\, u_8(x) \qquad (9)$$

Le petit groupe de $u_o + c\, u_8$ varie suivant la valeur de c, en passant par deux petits groupes maximaux $SU2^+ \times SU2^-$ pour $c = -\sqrt{2}$ et $(SU3)^d$ pour $c = 0$. Le choix d'une valeur de c fixera ainsi la symétrie la plus approchée du Hamiltonien total.

La valeur de c est fixée par les masses des mésons pseudoscalaires, jointes à des hypothèses sur un bon comportement des éléments de matrice des u_i hors de la couche de masse des mésons (voir 2ième réf. [22]).

Le résultat est :

$$c \simeq -\ 1,25 \quad \text{avec} \quad f_\pi \simeq f_k \simeq f_\eta$$

Cette valeur de c proche de $-\sqrt{2}$ est intéressante. En fait, on obtient

$$c = -\sqrt{2}\,\frac{m_k^2 - m_\pi^2}{m_k^2 + \frac{m_\pi^2}{2}} \qquad \text{et} \qquad \partial_\mu A_i^\mu = \frac{(\sqrt{2} + c)}{\sqrt{3}}\, v_i, \quad (i = 1,2,3) \qquad (10)$$

qui explicite la proximité de $SU2^+ \times SU2^-$ liée à la petite valeur de m_π^2. Ce résultat est spécifique au modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$, si l'on exclut évidemment $(1,8) + (8,1)$ qui donne $m_\pi^2 = 0$ ainsi que $SU2^+ \times SU2^-$ (si l'on considère que εH_1 se transforme suivant une représentation inrréductible).

$(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ donne donc un modèle cohérent avec le point de vue adopté du succès de PCAC lié à la proximité de $SU2 \times SU2$. (Brandt et Preparata [24] ont cependant adopté un point de vue différent en utilisant une version faible de PCAC : la divergence du courant axial est dominée par le pôle du pion entre deux états physiques sur leur couche de masse. Dans le cas d'un processus à deux pions, on doit tenir compte de ce fait. Ils aboutissent ainsi à une valeur de $c \tilde{=} -\ 0,25$ et donc une proximité de $(SU3)^d$; mais leur dérivation est très discutée [25] et nous n'y adhèrerons pas.)

Dans d'autres représentations, tel ne sera pas le cas, et on devra donc les étudier avec ce fait présent à l'esprit.

Expérimentalement, f_π et f_k diffèrent de l'ordre de 25%, ce qui mesure la précision du modèle.

Nous allons maintenant examiner deux conséquences de l'hypothèse $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$, liées au problème du terme σ.

2.- LONGUEURS DE DIFFUSION PION-PION

Le manque de données expérimentales sur les diffusions méson-méson autres que pion-pion fait que nous nous limiterons ici au cas $SU2 \times SU2$. Dans le chapitre sur les lagrangiens non linéaires et dans l'article N° 2 des méthodes générales sont données qui permettent de calculer aisément les longueurs de diffusion méson-méson dans le contexte de $SU3 \times SU3$.

$u_o + c\, u_8$ appartient à une représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $SU2^+ \times SU2^-$, et est évidemment scalaire par $(SU2)^d$; c'est l'hypothèse qu'on utilisera.

Les méthodes générales, algèbre des courants plus PCAC, ont permis à Weinberg [26] de calculer les longueurs de diffusion pion sur cible de masse suffisamment importante moyennant certaines hypothèses, en négligeant les termes de l'ordre de m_π^2, notamment la contribution de l'amplitude paire par croisement des pions qui est en $O(\epsilon)$ d'après le théorème d'Adler* [27].

Le calcul échoue donc dans le cas de la diffusion $\pi\pi$ qui est de l'ordre de m_π^2. Pour continuer le calcul, on doit spécifier le comportement du terme σ par $SU2^+ \times SU2^-$:

$$\sigma_{ij} = [Q_i^5, (Q_j^5, \epsilon \mathcal{H}_1(0)]$$

Weinberg suppose alors que ce terme est scalaire par $(SU2)^d$, ce qui découle en fait de l'hypothèse $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ et obtient ainsi les longueurs de diffusion pion-pion:

$$a_o \simeq 0,20\ m_\pi^{-1}$$
$$a_2 \simeq -\ 0,06\ m_\pi^{-1} \qquad (11)$$

Ces résultats sont compatibles avec la plupart des expériences actuelles (ainsi qu'avec certaines prévisions théoriques [28]).

---

* Ce théorème dit que l'amplitude pour le processus $i \to f + \pi$ ($q_\mu = 0$) est égale à la somme des amplitudes $i \to f$ avec insertion du pion sur les lignes extérieures à $O(\epsilon)$ près. Dans le cas de la partie paire par croisement de l'amplitude $\pi N \to \pi N$, ou dans le cas $\pi\pi \to \pi\pi$ on voit aisément que le processus $N \to N\pi$ ou $\pi \to \pi\pi$ est interdit, d'où le résultat utilisé.

Mais cependant certaines expériences dans $K\ell_4$ semblent indiquer une valeur de a_o plus grande, de l'ordre de 0,50 m_π^{-1} [29]. La situation n'est donc pas encore claire.

3.- LE TERME $\sigma_{NN}^{\pi\pi}$ DU NUCLEON [30]

La relation (8) prise pour i = j :

$$M^{ii}(q = 0) = \frac{2}{f_i^2} \langle N | [Q_i^5, [Q_i^5, \varepsilon \mathcal{H}_1(0)]] | N \rangle + O(\varepsilon^2) \qquad (12)$$

donne les amplitudes paires par croisement de la diffusion méson-nucléon extrapolées à des impulsions $q^\mu = 0$ des mésons incident et sortant, et s'exprime en fonction de c et des $\langle N | u_i(0) | N \rangle$ qui peuvent être estimés à partir des masses de l'octet de baryons et de résultats expérimentaux sur la diffusion KN et $\bar{K}N$. A l'aide de relations de dispersion Von Hippel et Kim [31] ont ainsi pu évaluer $\sigma_{NN}^{\pi\pi} \simeq 25$ MeV. Face à cette prédiction, l'estimation de $\sigma_{NN}^{\pi\pi}$ est difficile. Cheng et Dashen [32] ont obtenu une valeur voisine de 110 MeV ; cette valeur est controversée et Höhler, Jakob et Strauss [33] ont obtenu une réestimation de 40 MeV. Nous n'entrerons pas dans une discussion des méthodes et principes utilisés à ce sujet (voir la référence [30] pour une telle discussion), mais nous retiendrons que la situation, en ce qui concerne le choix de $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ est encore incertaine.

4.- AUTRES REPRESENTATIONS

Devant les incertitudes du modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$, d'autres représentations, irréductibles ou non, ont été considérées. La représentation la plus populaire envisagée comme substitut est (8,8), et nous allons en dire quelques mots car, outre sa simplicité, elle présente certains traits intéressants.

En effet, Sugawara [8] a essayé de construire une théorie dont les champs fondamentaux seraient des observables, en l'occurence les courants faibles et électromagnétique. Dans une telle théorie, le tenseur d'énergie-impulsion $\theta_{\mu\nu}(x)$ s'exprime en fonction de ces courants, et les relations de commutation de l'algèbre des courants fixent alors la dynamique de celle-ci. Mais Dashen et Frishman [34] ont remarqué qu'alors le

tenseur $\theta_{\mu\nu}(x)$ se mettait sous la forme $\theta^{(+)}_{\mu\nu} + \theta^{(-)}_{\mu\nu}(x)$, $\theta^{(+)}_{\mu\nu}$ et $\theta^{(-)}_{\mu\nu}$ commutant, étant chacun conservé et satisfaisant à $P\theta^{(\pm)}_{\mu\nu}P^{-1} = \theta^{(\mp)}_{\mu\nu}$, ce qui impose un doublement de la parité, chaque particule ayant un partenaire de parité opposée, ce que la nature ne montre pas. Pour échapper à cette conséquence, Crnnin et Guralnik [35] ont observé que des termes de Schwinger dans l'algèbre des courants permettaient de lever cette hypothèque. Mais on dispose alors de champs supplémentaires dans la théorie qu'il est naturel de convertir en observables, et du fait de leur comportement naturel (8,8) par $SU3^+ \times SU3^-$. Barnes et Isham [36] les ont utilisés dans un modèle de cassure (8,8) de la symétrie chirale (voir également les références [37] sur ce modèle).

Bien que séduisant par cette provenance, un tel terme (8,8) ne pourrait rendre compte que difficilement des longueurs de diffusion pion-pion. Dans le contexte des hypothèses habituelles, on obtient (voir par exemple [38]) $a_o \tilde{=} - 0,2\ m_\pi^{-1}$ ce qui n'est pas compatible avec l'expérience.

Ajoutons que ce problème existe également avec le choix $(6,\bar{6}) + (\bar{6},6)$ qui avec $(3,\bar{3})$ et (8,8) épuise les représentations "simples" de $SU3^+ \times SU3^-$. Dans le second article, nous donnons l'expression générale des longueurs de diffusion $\pi\pi$ en fonction des valeurs des Casimir de la représentation choisie et obtenons par exemple dans le cas $(6,\bar{6}) + (\bar{6},6)$ $a_o \tilde{=} - 0,13\ m_\pi^{-1}$. (Pour une discussion de cette représentation, voir [39]).

Il est donc vraisemblable que, dans le cas où le modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ serait infirmé, l'on doive envisager des mélanges de représentations, mais on se trouve alors face à une prolifération de paramètres qui diminuent le pouvoir prédictif de la théorie, et le seul espoir est d'utiliser quelque principe qui réduise l'arbitraire du modèle (pour un exemple de mélange, voir [40]).

Dans une telle direction on a notamment voulu contraindre le terme εH_1 à l'invariance par une transformation dite de Kuo [41], $W = \exp i\frac{3\pi}{2} Y_3$ (automorphisme de $SU3^+ \times SU3^-$ conservant l'isospin et l'hypercharge). Un modèle $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3) + (8,8)$ a été ainsi envisagé [38]. Cependant, les arguments pour une telle invariance méconnaissaient la nature "à la Goldstone" de la symétrie chirale qui ne laisse pas le vide invariant (voir Dashen, réf. [3]), et rien ne justifie l'utilisation de W (voir cependant la discussion de Kuo [42]).

5.- UN EXEMPLE DE CONTRAINTE

Nous allons considérer le terme εH_1 dans les deux articles joints suivant une idée développée par Michel et Radicati [43].

Etant donné un groupe de symétrie d'un système physique quelconque décrit par exemple, mais non nécessairement, par un Lagrangien, supposons qu'une direction privilégiée émerge de ce système : par exemple la direction de polarisation d'une substance ferromagnétique, dont le Hamiltonien est invariant par rotation en l'absence d'un champ extérieur, ou tout aussi bien "la direction" que choisissent les interactions électromagnétiques et faibles des hadrons dans la représentation (1,8) + (8,1) qu'elles donnent du groupe $SU3^+ \times SU3^-$ d'invariance des interactions fortes.

Supposons encore que cette direction soit soumise à un principe variationnel, c'est-à-dire qu'elle rende minimum une certaine fonction qui caractérise ses orientations ("un lagrangien"). Il se passe alors le fait intéressant suivant : indépendamment des détails dynamiques de la théorie et pour des raisons purement géométriques, certaines directions rendent extremal ce Lagrangien ; elles sont caractérisées par leur appartenance à une orbite critique (c'est-à-dire isolée dans l'ensemble des orbites) et sont en général idempotents ou nilpotents d'une algèbre symétrique (nous précisons ces notions dans le papier N° 2). Ainsi un tel critère donne une classe de solutions sans rien connaître de la dynamique du problème. Il est alors très naturel à chaque fois que l'on se trouve devant un cas semblable, d'adopter cette restriction sur les directions possibles si l'on n'a pas de renseignements sur la dynamique du problème. Par exemple, dans le cas de cassure spontanée du vide (équation I, B. 12), il est économique de songer d'abord à ces solutions qui ont en quelque sorte "de bonnes chances" d'être sélectionnées par la nature.

Ajoutons que dans une toute autre approche, celle du Bootstrap, à ce genre de problème, on cherche à caractériser une direction de façon self-consistante comme solution d'une équation [44]

$$x_T x = \lambda x \qquad (13)$$

(la loi de composition T donnant une structure d'algèbre sur l'espace vec-

toriel des directions x_i) qui fournit donc des idempotents et des nilpotents de l'algèbre T, qui engendrent souvent des orbites critiques, et cela donne ainsi une motivation supplémentaire à cette notion.

Tout ceci reste à un stade très intuitif en ce qui concerne les interactions semi-fortes qui cassent $SU3^+ \times SU3^-$ dans l'ignorance où nous sommes de leur origine, mais le fait que les interactions faibles et électromagnétiques procurent un exemple d'orbites critiques et d'idempotents [43] nous encourage à adopter ces mêmes contraintes pour chaque représentation irréductible de $SU3^+ \times SU3^- \times P \times C$ apparaissant dans ${}^{c}H_1$.

Dans le premier article, nous étudions ainsi systématiquement les idempotents et nilpotents des représentations $(6,\bar{6})$ et $(8,8)$ invariants par $(SU2)^d$, avant de considérer un modèle mélangeant $(3,\bar{3}) + (\bar{3},3)$ avec $(8,8)$ ou $(6,\bar{6}) + (\bar{6},6)$, guidés par l'étude précédente, mais axant surtout la discussion sur le rôle d'une contrainte imposée par la symétrie de dilatation (que nous verrons dans le chapitre suivant).

Par contre, dans le second article, nous cherchons à aller au bout des conséquences en obtenant la forme la plus générale de ${}^{c}H_1$ vérifiant les critères "orbite critique" et "idempotent" et en calculant avec une grande généralité les longueurs de diffusion méson-méson qui en découlent.

***

Chapitre III

LE GROUPE DES DILATATIONS

Nous avons examiné dans les deux chapitres précédents, la possibilité d'une symétrie chirale SU3 $\times$ SU3 approchée de l'univers hadronique, realisée partiellement "à la Goldstone" et brisée suivant certaines directions par une partie du Hamiltonien. Ces mêmes idées ont été appliquées à l'étude d'une symétrie dite de dilatation, qui n'est plus une symétrie interne, mais est constituée par le groupe des transformations de l'espace-temps ;

$$x_\mu \rightarrow \lambda x_\mu \qquad (1)$$

Qu'une telle symétrie puisse jouer un rôle dans les interactions des particules a été suggéré par une invariance d'échelle expérimentale des fonctions de structure mesurées dans le processus de collision hautement inélastique électron-proton [45] De telles expériences testent le commutateur de deux courants au voisinage du cône de lumière ($(x - y)^2 \sim 0$), et il a été proposé que cette symétrie était restaurée sur le cône de lumière [46]

Nous n'aborderons pas cette question remarquant seulement qu'une algèbre des courants bilocales a été proposée sur le cône de lumière [12], suivant en cela la philosophie du modèle des quarks, déjà à la base de l'algèbre des courants SU3 $\times$ SU3. Nous traiterons plutôt cette symétrie de dilatation de façon analogue à la symétrie approchée SU3 $\times$ SU3, et en attribuant à chaque terme brisant SU3 $\times$ SU3 dans le hamiltonien, une dimension définie. Cette hypothèse est évidemment arbitraire, dans l'ignorance où nous sommes des mécanismes profonds de ces symétries, mais elle a un caractère esthétique et permet d'obtenir une contrainte sur εH_1 intéressante à étudier.

Nous examinerons dans ce chapitre les notions nécessaires à la compréhension du premier article, donnant notamment la dérivation de la relation fondamentale à laquelle sont soumises les valeurs moyennes dans le vide des termes cassant SU3 $\times$ SU3 et de dimension définie, qui nous procurera la contrainte désirée.

1.- LES PROPRIETES DU COURANT DE DILATATION [47]

Nous supposons les transformations $x^\mu \to e^{-\alpha} x^\mu$ réalisées unitairement sur l'espace de Hilbert physique. Chaque observable locale se transforme suivant une loi :

$$O(x) \to O_\alpha(e^\alpha x) \tag{2}$$

engendrée par le générateur D des dilatations

$$e^{i\alpha D}\, O(x)\, e^{-i\alpha D} = O_\alpha(e^\alpha x) \tag{3}$$

Nous nous placerons dans le cas d'une théorie Lagrangienne dans laquelle un courant de dilatation $\mathscr{D}_\mu(x)$ permet d'obtenir :

$$D = D(x^o) = \int d^3x\, \mathscr{D}_o(x) \tag{4}$$

Sous forme infinitésimale, (3) donne :

$$i\,[D(x^o),\, O(x)] = x^\mu\, \partial_\mu O(x) + \frac{\partial}{\partial\alpha}\, O_\alpha(x)\Big|_{\alpha = 0} \tag{5}$$

nous nous intéresserons à des opérateurs de dimension définie d

$$e^{i\alpha D(x^o)}\, O(x)\, e^{-i\alpha D(x^o)} = e^{\alpha d}\, O(e^\alpha x) \tag{6}$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\, O_\alpha(x)\Big|_{\alpha = 0} = dO(x) \tag{7}$$

Nous allons maintenant calculer le commutateur $[D(x^o),\, P_\mu]$. Remarquons tout d'abord que $D(x^o)$ contient explicitement une dépendance en x^μ, ainsi que le montre (5). Pour de tels opérateurs, nous introduisons la notation $\tilde{\partial}_\mu$, donnant la dérivée par rapport à la dépendance explicite en x^μ, définie comme :

$$\tilde{\partial}_\mu A(x) = \partial_\mu A(x) - i\,[P_\mu,\, A(x)] \tag{8}$$

pour tout opérateur $A(x)$.

Nous allons calculer $\tilde{\partial}_\mu D$ en dérivant (5) par rapport à x^μ

$$i\left[\partial_\mu D,\ O(x)\right] + i\left[D,\ \partial_\mu O(x)\right] = \partial_\mu\, O(x) + x^\mu \partial_\mu\, \partial_\mu\, O(x) + \partial_\mu\, \frac{\partial}{\partial \alpha}\, O_\alpha(x)\Big|_{\alpha = 0}$$

En remplaçant dans le premier membre $\partial_\mu D$ par $\tilde{\delta}_\mu D + i\left[P_\mu, D\right]$, puis en utilisant l'identité de Jacobi, nous obtenons :

$$i\left[\tilde{\delta}_\mu D,\ O(x)\right] = \partial_\mu\, O(x) \tag{9}$$

pour toute observable locale $O(x)$, soit :

$$\tilde{\delta}_\mu D(x^o) \equiv P_\mu \tag{10}$$

Ainsi :

$$i\left[D(x^o), P_\mu\right] = P_\mu - g_{\mu o}\, \frac{d}{dx^o}\, D(x^o) \tag{11}$$

en tenant compte de l'unique dépendance en x^o de D.

Cette relation montre que les relations de commutation :

$$i\left[D, P_\mu\right] = P_\mu \tag{12}$$

auxquelles on s'attendrait d'après les transformations :

$$x^\mu \to e^{-\alpha}\, x^\mu, \quad x^\mu \to x^\mu + a^\mu$$

n'ont lieu que lorsque $\partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x) = 0$, ou $\frac{d}{dx^o} D(x^o) = 0$ ce qui correspond à une action invariante par dilatation donc à un Lagrangien de dimension 4 (d^4x étant de dimension -4).

2. - STRUCTURE DE $\mathscr{H}(x)$

Nous supposons la densité du Hamiltonien scindée en :

$$\mathscr{H}(x) = \sum_{n=0}^{N} \mathscr{H}^{(n)}(x) \tag{13}$$

chaque $\mathscr{H}^{(n)}(x)$ étant de dimension d_n.

Nous allons obtenir une contrainte sur $\mathcal{H}(x)$ en partant de (11) pris pour $\mu = 0$:

$$i\left[D(x^o), H\right] = H - \frac{d}{dx^o} D(x^o) \qquad (14)$$

Portant $H = \int d^3x \sum_{n=0}^{N} \mathcal{H}^{(n)}(x)$ dans cette relation, le membre de gauche devient :

$$i\left[D(x^o), H\right] = i \int d^3x \left[D(x^o), \sum_n \mathcal{H}^{(n)}(x)\right] = \int d^3x (x^\mu \partial_\mu \sum_n \mathcal{H}^{(n)}(x) + \sum_n d_n \mathcal{H}^{(n)}(x$$

$$= x^o \partial_o \int d^3x \mathcal{H}(x) + \int d^3x (x^i \partial_i \sum_n \mathcal{H}^{(n)}(x) + \sum_n d_n \mathcal{H}^{(n)}(x))$$

$$= \quad 0 \quad + \int d^3x \sum_n (d_n - 3) \mathcal{H}^{(n)}(x)$$

tandis que le membre de droite devient :

$$\int d^3x \left[\sum_n \mathcal{H}^{(n)}(x) - \partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x) \right]$$

soit :

$$\int d^3x \sum_n (4 - d_n) \mathcal{H}^{(n)}(x) = \int d^3x \, \partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x) \qquad (15)$$

A ce point, il est possible d'arriver à une forme locale pour (15) si l'invariance par dilatation de l'action est brisée par des termes dans le Lagrangien ne contenant pas de couplage dérivatif. Ces termes, de dimenion différente de 4, se retrouvent dans le tenseur d'énergie-impulsion sous la forme $g_{\mu\nu}\theta(x)$, soit :

$$\mathcal{H}(x) = \bar{\theta}_{oo}(x) + \theta(x) \qquad (16)$$

avec $\bar{\theta}_{oo}(x)$ de dimension 4, et $\theta(x)$ un scalaire de dimensions différentes de 4.

Dans (15) $\sum_n (4 - d_n) \mathcal{H}^{(n)}(x)$ et $\partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x)$ sont scalaires et il est alors possible d'en déduire leur égalité [48] :

$$\sum_n (4 - d_n) \mathcal{H}^{(n)}(x) = \partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x) \qquad (17)$$

Prenant la valeur moyenne de (17) (ou tout aussi bien de (15) d'ailleurs) dans le vide, on obtient :

$$\sum_n (4 - d_n) < 0 | \mathcal{H}^{(n)}(x) | 0 > = 0 \qquad (18)$$

c'est la contrainte que nous utiliserons dans le premier article en supposant que chaque $\mathcal{H}^{(n)}(x)$ appartient également à une représentation irréductible de $SU3^+ \times SU3^- \times P \times C$, avec bien sûr $\mathcal{H}^{(o)}(x) = \bar{\theta}_{oo}(x)$ invariant par ce groupe.

3.- REALISATION A LA GOLDSTONE DES DILATATIONS

Les relations de commutation (12) obtenues dans le cas de l'invariance de l'action par dilatation entraînent :

$$e^{i\alpha D} P^2 e^{-i\alpha D} = e^{2\alpha} P^2 \qquad (19)$$

Dans le cas d'une réalisation linéaire du groupe des dilatations sur les états physiques, ceci implique soit que le spectre de masse est continu, soit que toutes les masses sont nulles. Il n'est donc pas possible de supposer que l'univers est proche d'une invariance par dilatation réalisée ainsi. Comme dans le cas de la symétrie chirale, nous sommes ainsi conduits à une réalisation à la Goldstone de cette symétrie, avec, par conséquent, une particule de Goldstone, le dilaton, qui acquiert une masse avec les termes $\mathcal{H}^{(n)}(x)$. La situation est analogue au cas de $SU2 \times SU2$ et du pion et par exemple on pourra supposer que les éléments de matrice de $\partial_\mu \mathcal{D}^\mu(x)$ sont dominés par le pôle du dilaton, ce qui donnera des théorèmes semblables à PCAC [47].

4.- LES DILATATIONS ET LA THEORIE DES PERTURBATIONS

Nous terminerons ce chapitre en remarquant [49] que dans une théorie Lagrangienne, le courant $\mathcal{D}_\mu(x)$ est défini de façon formelle ainsi que les relations de commutation de $D(x^o)$ avec les champs de la théorie. Il reste à montrer que les identités de Ward que l'on en déduit sont vérifiées en théorie des perturbations, c'est-à-dire qu'elles ne développent pas d'anomalies telles que l'anomalie d'Adler [50] dans le cas

de l'algèbre des courants.

En fait, la situation en perturbation est mauvaise. Coleman et Jackiw [49] ont montré les points suivants :

a) A l'ordre le plus bas, non trivial, de la théorie des perturbations les identités de Ward contiennent une anomalie, qui correspond à un changement de la dimension des champs, ce qui n'est pas trop grave.

b) Mais aux ordres plus élevés, les anomalies qui apparaissent ne peuvent être absorbées par un changement de dimension des champs.

c) A tous les ordres des perturbations et à moment de transfert nul (dans une théorie d'un champ scalaire φ avec une interaction φ^4 pour fixer les idées), il découle des équations de Callan-Symanzik [51] que l'identité de Ward associée avec le propagateur contient encore un premie terme anormal absorbé par un changement de la dimension du champ φ, mais surtout un second terme anormal qui n'a pas cette interprétation et qui est non nul en théorie des perturbations.

Ainsi, les calculs formels que nous avons effectués pour obtenir la relation (18) ne sont pas vérifiés en théorie des perturbations et nous devons supposer que malgré tout, la théorie réelle qui décrit notre univers choisit ce second terme anormal nul (conjecture de Wilson) afin de mener à bien les calculs de notre premier article.

* * *

Chapitre IV

LES LAGRANGIENS NON LINEAIRES

Les Lagrangiens non-linéaires [52,53] procurent des modèles satisfaisant à l'algèbre des courants et PCAC qui permettent d'obtenir de façon commode les théorèmes de mésons mous. Ils sont eux-mêmes invariants ou non par le groupe $SU3^+ \times SU3^-$ réalisé de façon non-linéaire sur les états et les champs correspondants, mais dans le cas où un terme brise l'invariance, celui-ci ne doit pas contenir de couplage dérivatif si l'on veut préserver l'algèbre des courants. Dans le second article, nous les utiliserons pour tester le caractère tensoriel de $\mathcal{H}_1$ en calculant les longueurs de diffusion méson-méson.

Nous montrerons tout d'abord sur le modèle σ [54] le lien entre les représentations linéaires avec cassure spontanée du vide gouvernée par le théorème de Goldstone et les représentations non-linéaires utilisant un nombre moindre de champs. Nous poursuivrons par quelques considérations plus générales sur la question [53] avant de terminer en présentant la représentation non-linéaire que nous utilisons.

1. - LE MODELE σ [54]

Le modèle σ utilise la représentation $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $SU2^+ \times SU2^-$ ($u_+ \in SU2^+$, $u_- \in SU2^-$)

$$\sigma + i \tau_i \pi_i \to \sigma' + i \tau_i \pi_i' = u_+ (\sigma + i \tau_i \pi_i) u_-^\dagger \qquad (1)$$

(correspondant à la décomposition de la représentation $x \to u_+ x u_-^\dagger$ en ses parties irréductibles paires et impaires par conjugaison de charge :

$$x \pm c \bar{x} c^{-1} \qquad (\bar{x} \text{ conjuguée de } x)$$

la matrice c ayant la propriété $c u_\pm c^{-1} = \bar{u}_\pm$; $c = \tau_2$ dans la représentation τ_i.

Le pseudo-scalaire π_i correspond au champ du pion, le scalaire

σ à une particule hypothétique scalaire et isoscalaire.

De (1), on déduit :

$$\delta\pi_i = - i \left[\alpha_j Q_j, \pi_i\right] = - \varepsilon_{ijk} \alpha_j \pi_k$$

$$\delta\sigma = - i \left[\alpha_j Q_j, \sigma\right] = 0$$

$$\delta_A\pi_i = - i \left[\beta_j Q_j^5, \pi_i\right] = \beta_i \sigma$$

$$\delta_A\sigma = - i \left[\beta_j Q_j^5, \sigma\right] = - \beta_k \pi_k$$

et $\vec{\pi}^2 + \sigma^2 = \text{constante}$.

Un lagrangien invariant chiral sera par exemple :

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 (\vec{\pi}^2 + \sigma^2) + \lambda (\vec{\pi}^2 + \sigma^2)^2$$

Les méthodes de (I, ap. B) montrent que pour un tel lagrangien $<0|\pi_i|0>$, $<0|\sigma|0>$ pourront avoir des valeurs différentes de zéro suivant les valeurs de μ^2 et de λ : si l'on garde uniquement les graphes en arbre, la condition $\frac{\delta A[\varphi]}{\delta\varphi} = 0$ devient ici une condition qur le minimum du potentiel classique :

$$- \frac{1}{2} \mu^2 (\vec{\pi}^2(x) + \sigma^2(x)) + \lambda (\vec{\pi}^2(x) + \sigma^2(x))^2 \qquad (3)$$

pour les valeurs $<0|\pi_i|0>$ et $<0|\sigma|0>$

Une transformation éventuelle de $SU2^+ \times SU2^-$ permet de supposer que :

$$<0|\sigma|0> = k \neq 0$$
$$<0|\pi_i|0> = 0 \qquad (4)$$

Dans un tel cas, on peut faire une transformation non-linéaire sur les champs [55] :

$$\sigma' = \sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2} - k$$

$$\vec{\pi}' = \vec{\pi} \frac{k}{\sqrt{\sigma^2 + \vec{\pi}^2}} \qquad (5)$$

une telle transformation est de la forme :

$$\sigma' = (\sigma - k)\, f\,(\sigma - k,\ \vec{\pi})$$

$$\pi_i' = \pi_i\, g(\sigma - k,\ \vec{\pi}) \qquad (6)$$

avec $f(0,0) = g(0,0) = 1$. Cette transformation laisse les éléments de matrice S sur leur couche de masse inchangés [56], et on a notamment :

$$<0|\sigma'|0> = 0$$

$$<0|\pi_i'|0> = 0 \qquad (7)$$

Le groupe chiral agit maintenant non linéairement :

$$\delta\, \sigma' = 0$$

$$\delta\, \pi_i' = - \varepsilon_{ijk}\, \alpha_j\, \pi_k$$

$$\delta_A\, \sigma' = 0$$

$$\delta_A\, \pi_i' = \beta_i \sqrt{k^2 - \vec{\pi}^2} \qquad (8)$$

mais maintenant σ' est devenu un invariant, de sorte que nous pouvons choisir un lagrangien dépendant de π' uniquement, invariant par les transformations non-linéaires (8), lequel lagrangien pourrait évidemment se déduire du lagrangien de départ en lui ajoutant des invariants chiraux qui détruiraient en quelque sorte le couplage superflu pion-sigma qu'il comporte.

On vérifie facilement que le vide du nouveau Lagrangien n'est pas invariant par les générateurs chiraux Q_i^5 et que ce Lagrangien non-linéaire ne peut comporter de terme de masse pour le pion, qui ne serait

pas invariant chiral, ce qui montre la nature boson de Goldstone du pion.

Weinberg [52] a étudié les représentations non-linéaires de $SU2^+ \times SU2^-$ sur le champ du pion, et a montré qu'elles étaient équivalentes (à une transformation $\pi_i' = \pi_i \, f(\vec{\pi}^2)$ près) à

$$[Q_i^5, \pi_j] = - i \lambda^{-1} [\tfrac{1}{2} (1 - \lambda^2 \vec{\pi}^2) \delta_{ij} + \lambda^2 \pi_i \cdot \pi_j] \qquad (9)$$

On peut adjoindre une interaction du pion avec des champs $\{\psi_\alpha\}$ donnant une représentation réductible ou non de $(SU2)^d$ de générateurs infinitésimaux t_i, les chamss $\{\psi_\alpha\}$ se transformant par les générateurs chiraux de la façon suivante :

$$[Q_i^5, \psi_\alpha] = \lambda (\vec{t} \times \vec{\pi})_i \psi_\alpha \qquad (10)$$

On construit alors un Lagrangien non-linéaire invariant par $SU2^+ \times SU2^-$, contenant les dérivées des champs sous la forme covariante :

$$D_\mu \vec{\pi} = (1 + \lambda^2 \pi^2)^{-1} \partial_\mu \vec{\pi}$$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + 2 i \lambda^2 (1 + \lambda^2 \vec{\pi}^2)^{-1} \vec{t} \cdot (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) \psi \qquad (11)$$

en formant à l'aide des π_i, ψ_α, $D_\mu \pi_i$ et $D_\mu \psi_\alpha$ un Lagrangien invariant par $(SU2)^d$.

2. - LES REPRESENTATIONS NON-LINEAIRES

Coleman, Wess et Zumino [53] (CWZ) ont examiné la structure des Lagrangiens non-linéaires de façon plus générale, les champs étant placés dans une représentation non-linéaire d'un groupe de Lie compact, linéaire lorsqu'on se restreint à un sous-groupe H de G. Les bosons de Goldstone apparaissent comme paramètres de G/H (la méthode est analogue à la technique des représentations induites [57] ; voir également [43] 2ème référence .

Plus précisément, appelant V_i les générateurs de H, A_ℓ les autres générateurs (par analogie avec le cas $SU3^+ \times SU3^-$), V_i et A_ℓ for-

mant une base orthonormale pour le produit de Cartan, on paramètre un élément $g \in G$ par :

$$g = e^{\xi_\ell A_\ell} \; e^{u_i V_i} \tag{12}$$

L'action de g_o :

$$g_o \; e^{\xi_\ell A_\ell} = e^{\xi'_\ell A_\ell} \; e^{u'_i V_i} \tag{13}$$

définit les fonctions :

$$\xi' = \xi'(\xi, g_o), \quad u' = u'(\xi, g_o) \tag{14}$$

Etant donnée une représentation linéaire de H :

$$\psi \to D(h) \; \psi, \qquad (h \in H) \tag{15}$$

Toute représentation non-linéaire de G, linéaire par rapport à H, est alors équivalente à une représentation (ξ, ψ) :

$$\xi \to \xi', \quad \psi \to \psi' = D(e^{u'V}) \; \psi \tag{16}$$

par l'élément $g_o \in G$. On vérifie facilement qu'une telle transformation est bien une représentation qui est linéaire pour le sous-groupe H. (Les ξ_ℓ donnent une représentation linéaire de H, $D^{(\xi)}$, parce qu'on a choisi une base V_i, A_ℓ orthonormale). On peut alors identifier les ξ et ψ à des champs $\xi(x)$ (bosons de Goldstone) et $\psi(x)$ - CWZ construisent les dérivées covariantes $D_\mu \xi$, $D_\mu \psi$ se transformant comme :

$$\begin{aligned} D_\mu \xi &\to D^{(\xi)} \; (e^{u'V}) \; D_\mu \xi \\ D_\mu \psi &\to D \quad (e^{u'V}) \; D_\mu \psi \end{aligned} \tag{17}$$

permettant de former un Lagangien invariant par G dès qu'il est invariant par H.

CWZ résolvent également le problème de former des quantités se transformant linéairement par G à partir des ξ et ψ, ainsi que le problème inverse, ce qui permet d'ajouter au Lagrangien une partie cassant la

symétrie et de propriétés tensorielles définies.

Nous utiliserons dans le second article une telle méthode pour le groupe $SU3^+ \times SU3^-$; comme nous nous intéresserons seulement aux interactions méson-méson, il nous suffira d'identifier un choix de paramètres du groupe quotient $\frac{SU3^+ \times SU3^-}{(SU3)^d}$ avec les champs de mésons $M_i(x)$. La loi de transformation des $M_i(x)$ est obtenue commodément sous forme matricielle :

$$\exp 2i \frac{g_i M_i}{\chi} \to U(u_+) \exp 2i \frac{g_i M_i}{\chi} U^+(u_-) = \exp 2i \frac{g_i M_i'}{\chi} \qquad (18)$$

(les g_i et $U(u)$, représentations de l'algèbre de Lie de SU3 et de SU3 dans un espace de dimension n : voir le second article pour les notations). Ceci a pour intérêt de mettre en évidence les représentations $(n,\bar{n})$ données par les éléments de matrice des $\exp 2i \frac{g_i M_i}{\chi}$ formées à partir des M_i, que nous utiliserons comme cassure.

Nous allons voir maintenant comment nous aurions pu, dans ce second travail, donner une dimension aux termes cassant $SU3^+ \times SU3^-$ en incluant une interaction avec un dilaton, avant de terminer en montrant comment on déduit les théorèmes de l'algèbre des courants par la technique des Lagrangiens non-linéaires pris dans l'approximation des graphes en arbre.

Un terme cassant la symétrie chirale, appartenant à la représentation $(n,\bar{n})$ sera de la forme :

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_i \lambda_i \exp 2i \frac{g_i M_i(x)}{\chi} \qquad (i = 0, 1 \ldots 8) \qquad (19)$$

Afin de lui donner une dimension d, que nous choisissons différente de 4, nous introduisons un champ $\chi(x)$ de dimension 1, nous multiplions (19) par $\chi(x)^d$ et remplaçons le coefficient χ par $\chi(x)$:

$$\chi(x)^d\ \mathrm{Tr}\ \gamma_i \lambda_i \exp 2i \frac{g_i M_i(x)}{\chi(x)} \qquad (20)$$

(les champs $M_i(x)$ ont la dimension canonique 1, de telle sorte que

$M_i(x)/\chi(x)$ est sans dimension).

Nous ajoutons ensuite au Lagrangien choisi décrivant les $M_i(x)$ un potentiel $\lambda\ \chi(x)^4$ qui, joint aux termes en $\chi(x)$ provenant de (20) :

$$\chi(x)^d\ (\mathrm{Tr}\ \gamma_o \lambda_o + \dots) \tag{21}$$

va donner par un mécanisme à la Goldstone déjà décrit

$$<0|\chi(x)|0> = \chi \neq 0 \tag{22}$$

La translation habituelle $\chi'(x) = \chi(x) - \chi$ permet alors d'annuler le tadpole en $\chi(x)$, tout en donnant une masse au dilaton $\chi'(x)$. Le développement en série de (20) donne une interaction entre $\chi'(x)$ et les $M_i(x)$ qui permet de calculer éventuellement la largeur du dilaton (si les masses respectives du χ' et des M_i autorisent la désintégration du χ' bien entendu).

Nous n'avons cependant pas poursuivi notre travail dans cette direction car la discussion dépendant des paramètres d ne donne comme sous-produit nouveau que $m_{\chi'}$ et $\Gamma_{\chi'}$ que l'on peut ajuster en faisant varier les d dans une échelle assez large (voir pour un exemple les références [38, 58]).

3.- L'APPROXIMATION DES GRAPHES EN ARBRE

Les Lagrangiens non-linéaires sont des modèles donnant des courants satisfaisant à l'algèbre des courants (nous ne considérons pas de couplage dérivatif), satisfaisant éventuellement à PCAC et proches d'une invariance $SU3^+ \times SU3^-$ avec des termes σ de propriétés tensorielles désirées. Si l'on pouvait calculer les éléments de matrice S, on aurait donc une technique pour obtenir les relations qu'imposent ces contraintes (telles que relation de Goldberger-Treiman, théorème d'Adler...). Ceci n'est pas possible, mais il existe heureusement un développement de la matrice S qui exhibe ordre par ordre ces relations [53].

CWZ définissent pour tout Lagrangien $L[\phi]$ le Lagrangien

$L[\Phi, a] = a^{-2} L[a\Phi]$. Un décompte des puissances de a montre que pour un nombre de lignes externes E et un nombre de boucles L, la puissance a d'un graphe de Feynman est :

$$P = E + 2L - 2 \qquad (23)$$

Le premier terme du développement de la matrice S(a) est donc donné par les graphes en arbre, L = 0. CWZ montrent alors que les contraintes imposées par l'algèbre des courants ou PCAC sont conservées ordre par ordre dans le développement en a, et que par conséquent l'approximation des graphes en arbre retient bien les relations désirées.

Comme exemple, prenons le cas du calcul des longueurs de diffusion qui nous intéresse. On les déduit en restreignant l'amplitude, développée en puissance des impulsions des mésons au second ordre par les conditions suivantes : statistique de Bose, croisement, l'algèbre des courants, le théorème d'Adler et les propriétés scalaires du terme σ, toutes choses que l'on peut satisfaire par un Lagrangien non-linéaire. On obtient ainsi, en prenant les graphes en arbre, les longueurs de diffusion (les graphes à une boucle et plus donneraient des termes d'ordre supérieur à deux dans les impulsions).

Nous terminerons ce chapitre en notant que les Lagrangiens non-linéaires donnent des éléments de matrice S sur la couche de masse des particules et procurent par conséquent une interpolation dépendant du modèle choisi, à des impulsions non nulles des mésons, des relations genre théorèmes de pions mous, par exemple.

* * *

REFERENCES

[1] M. Gell-Mann, Physics 1, 63 (1964)

[2] Les applications et développements de l'algèbre des courants sont décrits dans "Current Algebras", S. Adler and R. Dashen, Benjamin 1968 ; et "Currents Algebras and their applications", B. Renner, Pergamon Press, 1968

[3] Ce point de vue est développé par exemple par S. Weinberg dans "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory", Brandeis 1, 1970
Voir également R. Dashen, Phys. Rev., D3, 1879 (1971)

[4] N. Cabibbo, Phys. Rev. Letters, 10, 531 (1963)

[5] S. Fubini and G. Furlan, Physics 1, 229 (1965)

[6] S.L. Adler, Phys. Rev., 140B, 736 (1965)

[7] S.L. Adler, Phys. Rev. Letters, 14, 1051 (1965)
W.I. Weisberger, Phys. Rev. Letters, 14, 1047 (1965)

[8] H. Sugawara, Phys. Rev., 170, 1659 (1968)

[9] R. Dashen and M. Gell-Mann, Phys. Rev. Letters, 17, 340 (1966)

[10] S. Weinberg, Phys. Rev., 177, 2604 (1968)

[11] Voir par exemple D.A. Dicus, R. Jackiw and V.L. Teplitz, Phys. Rev. D4, 1733 (1971)

[12] H. Fritzsch and M. Gell-Mann, Coral Gables 1971

[13] M.L. Goldberger and S.B. Treiman, Phys. Rev., 110, 1178 (1958)
Y. Nambu, Phys. Rev. Letters, 4, 380 (1960)
M. Gell-Mann and M. Lévy, Nuovo Ciments, 16, 705 (1960)

[14] Voir par exemple la revue de S. Coleman dans "Hadrons and their Interactions", Ettore Majorana 1967, Academic Press.

[15] Voir S. Weinberg, référence [3]

[16] Nous suivons la discussion de B. Renner dans "Broken Symmetries", in GIFT Seminar in Theoretical Physics, Madrid 1972 - Voir également réf [13] et [14]

[17] J. Goldstone, Nuovo Ciments, 19, 154 (1961)

[18] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, Phys. Rev., 127, 965 (1962)

[19] G. Jona-Lasimio, Nuovo Cimento, 34, 1790 (1964)

[20] Pour une application du formalisme fonctionnel aux symétries chirales, voir : B. W Lee "Chiral Dynamics" Gordonand Breach (1972)

[21] R. Dashen, Phys. Rev., 183, 1245 (1969)

[22] S.L. Glashow and S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, 20, 224 (1968)
M. Gell-Mann, R.J. Oakes and B. Renner, Phys. Rev., 175, 2195 (1968)

[23] M. Gell-Mann, Phys. Rev., 125, 1067 (1962)

[24] R.A. Brandt and G. Preparata, Ann. of Phys., 61, 119 (1970)

[25] Voir par exemple B. Renner, réf [17]

[26] S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, 17, 616 (1966)

[27] S.L. Adler, Phys. Rev., 139 B 1638 (1965)

[28] J.C. Le Guillou, A. Morel and H. Navelet, Nuovo Cimento 5A, 659 (1971

[29] cf : P. Basle et al., Phys. Letters, 36 B, 619 (1971, entre autres

[30] cf : la discussion de B. Renner dans Springer tracts in modern physics, vol. 61, Springer-Verlag (1972)

[31] F. von Hippel and J.K. Kim, Phys. Rev. D1, 151 (1970)

[32] T.P. Cheng and R.F. Dashen, Phys. Rev. Letters 26, 594 (1971)

[33] G. Höhler, H.P. Jakob and R. Strauss, Phys. Letters, 35 B, 445 (1971)

[34] R. Dashen and Y. Frishman, Phys. Rev. Letters, 22, 572 (1969)

[35] C. Cronin and G. Guralnik, Phys. Rev. 184, 1803 (1969)

[36] K.J. Barnes and C.J. Isham, Nucl. Phys., B17, 267 (1970)

[37] H. Genz and J. Katz, Nucl. Phys., B21, 333 (1970)
J. Brehm, Nucl. Phys., B34, 269 (1971)

[38] A.M. Harun - Ar Rashid and M.A. Rashid, Phys. Rev., D3, 581 (1971)

[39] P.R. Auvil, Phys. Rev., D6, 3209 (1972)

[40] A. Sirlin and M. Weinstein, Phys. Rev., D6, 3588 (1972)

[41] T.K. Kuo, Phys. Rev., D2, 342 (1970)

[42] T.K. Kuo, Phys. Rev., D4, 3620 et 3637 (1971)
Phys. Rev., D5, 1033 (1972)

[43] Voir réf [6] du papier N°2 et "Geometrical Aspects of symmetry Breaking" L. Michel in "Broken Symmetries", GIFT, Seminar in theorical physics, Madrid 1972

[44] Un exemple en est donné par N. Cabibbo dans : Nobel Symposium 8 "Elementary Particle Theory" (1968)

[45] E.D. Bloom et al. dans : XV International on High Energy Physics, Kiev (1970)

[46] R. Brandt and G. Preparata, Nucl. Physics, B27, 541 (1971)

[47] Voir par exemple les revues de H. Kleinert "Low Energy Aspects of Broken Scale Invariance" in XI Internationale Universitatswochen fur Kernphysik, Berlin (1972)
et de P. Carruthers "Broken Scale Invariance in Particle Physics", Phys. Reports, 1C (1971)

[48] M. Gell-Mann, Lecture Notes, Hawai Summer School (1969)

[49] S. Coleman and R. Jackiw, Ann. of Phys., 67, 552 (1971)

[50] S.L. Adler dans "Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory" Brandeis 1 (1970)

[51] C.G. Callan Jr., Phys. Rev., D2, 1541 (1970)
K. Symanzik, Comm. Math. Phys., 18, 227 (1970)

[52] S. Weinberg, Phys. Rev. Letters, 18, 507 (1967)
Phys. Rev., 166, 1568 (1968)

[53] S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev., 177, 2239 (1969)

[54] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cimento, 16, 53 (1960)

[55] B. Zumino dans "Lectures Elementary Particles and Quantum Field Theory" Brandeis 2 (1970)

[56] C'est un résultat correspondant à l'arbitraire des choix des champs interpolants en théorie des champs axiomatiques :
R. Haag, Phys. Rev., 112, 669 (1958). Voir également réf : [14] et [53]

[57] G. W. Mackey, "Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics", Benjamin (1968)

[58] C. J. Isham, A. Salam and J. Strathdee, Phys. Rev. D2, 685 (1970)

* * *

Reprinted from ANNALS OF PHYSICS
Vol. 69, No. 1, January 1972
Printed in Belgium
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

The Symmetric Algebra for $SU(3) \times SU(3)$ Representations and Broken Chiral and Scale Invariance

A. CHAKRABARTI AND C. DARZENS

Centre de Physique Théorique de l'École Polytechnique, Paris V, France

Received March 31, 1971

In the first part of our work we study, for the representations $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$, the corresponding symmetric algebras, following the ideas of Michel and Radicati. For each case, we construct, for this algebra, the idempotents and nilpotents of interest. It is shown in particular, that for each case, only the $SU(3)$ scalar (denoted by w_0) is the only idempotent which does not contain the (27) representation of $SU(3)$.

In the second part of our work we study some consequences of generalizing the well-known $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ symmetry-breaking Hamiltonian by including a w_0 term from either $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ or $(8, 8)$. We do so in the context of broken dilatation symmetry. The constraints imposed on the dimensions of the two different chiral symmetry-breaking terms are studied by exploiting certain basic positivity properties, without introducing meson pole dominance or related types of approximations.

1. INTRODUCTION

The work presented in the following sections may be divided into two linked but fairly distinct parts.

In the first part we study the symmetric algebra for certain representations of $SU(3) \times SU(3)$.

In a recent series of papers [1] Michel and Radicati have studied the symmetric algebras corresponding to the octet representation of $SU(3)$ and the $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ representation of $SU(3) \times SU(3)$. They have shown that the physically important directions of the breaking of hadronic internal symmetries correspond to idempotents and nilpotents of such algebras, namely, solutions of equations of the type (with nonzero and zero values of λ, respectively)

$$x_T x = \lambda x \tag{1.1}$$

(where "T" denotes the symmetric product for the representation in question). They have also pointed out that such vectors are also those obtained by starting from certain types of variational postulates, those, for example, that are often introduced in bootstrap methods. This is a particularly interesting point.

© 1972 by Academic Press, Inc.

In Section 2 we have studied the symmetric algebras corresponding to $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$ representations of $SU(3) \times SU(3)$, and have obtained explicitly all the idempotents and nilpotents.

One point is to be particularly noted. *It is found that among the idempotents and nilpotents of* $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ *and* $(8, 8)$ *only one (in each case) does not include a component belonging to the* (27) *component of* $SU(3)$, *namely, the vector having* $SU(3)$ *as a little group.* (By $SU(3)$ we mean, as usual, the "diagonal" $SU(3)^d$ generated by the vector currents.)

That is, apart from the $SU(3)$ scalar there is no linear combination of $SU(3)$ singlet and octet satisfying (1.1) [2].

With this point in mind let us now look at the content of the second part of our work where we study certain consequences of a chiral symmetry breaking part of the Hamiltonian of the form

$$H' = u_0 + cu_8 + w_0 , \tag{1.2}$$

where u_0, u_8 are the usual singlet and octet scalar terms belonging to the $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ representation and w_0 is the scalar $SU(3)$ singlet belonging to either $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ or $(8, 8)$.

The importance of $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ representation in the study of broken chiral symmetry is well known [3–5]. But a model with only such terms involves quite strong constraints, and plausible generalizations should be studied in order to achieve a more refined agreement with experimental results.

The generalization we have chosen to study is the simplest possible modification of the *singlet* term [6–8].

It is to be noted that the contributions of w_0 to the axial current divergences, namely $i[F_i^5, w_0]$ simply transform like an octet under $SU(3)$ transformations. The vector currents of course commute with w_0. Thus, though we are introducing a representation of the type $(n, \bar{n})$ with $n > 3$, certain aspects of the simplicity of the previous model are maintained.

From a more formal point of view, the special position of w_0 among the idempotents have already been emphasized. We may further note that though for general values of c the term $(u_0 + cu_8)$ is in fact a superposition of an idempotent (for $c = 0$) and a nilpotent (for $c = -\sqrt{2}$), physically interesting solutions are usually found to be near one or the other of these two values. But if we want to avoid a (27) contribution directly in the Hamiltonian, while keeping a combination of w_0 and w_8 (the corresponding $SU(2)$ invariant contribution from the octet), at least two of the special vectors of the type (1.1) must appear with coefficients of the same order.

Let us note finally that (1.2) can be made to commute with $SU(2)^{(+)} \times SU(2)^{(-)}$ only in the limit $w_0 \to 0$, $c \to -\sqrt{2}$. And in this limit the usual low energy techni-

ques and PCAC, if accepted, lead to zero pion mass ($m_\pi^2 = 0$), even if the vacuum is not $SU(3)$ symmetric [9].

The consequences of the term w_0 in (1.2) is particularly important for the double commutators with the axial currents (the σ-terms), where for the first time contributions from the (27) representation of $SU(3)$ appear. And it is the role of such double (and higher) commutators that we will study particularly. Moreover, we will do so in the context of broken scale or dilatation symmetry.

Many authors have recently studied different aspects and possibilities of joint breaking of scale and chiral invariance [Refs. 10–19 and other references qoted therein].

Apart from the association of both types of symmetry breaking with mass terms, it may be argued more generally that for hadrons with some internal structure, the operation of space-time dilatation, bringing modifications of internal forces into play, must have some nontrivial link with internal symmetries.

A first tentative step in exploring such possible links usually consists in assuming that the chiral symmetry breaking term has a definite dimension. In Refs. 14–16 it is argued that a Hamiltonian density of the form

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + \delta + u_0 + cu_8 \,, \tag{1.3}$$

where δ is a c-number and u $(=u_0 + cu_8)$ has a dimension

$$d = 1, 2 \text{ or } 3, \tag{1.4}$$

is compatible with the present experimental data. (The term $\bar{\theta}_{00}$ is, of course, of dimension 4 and is a chiral scalar.) The postulate that the necessary additional term δ is a c-number indeed introduces a certain simplicity. But even if such a postulate leads to no flagrant contradiction, in our opinion it is of interest to study the consequences of a model with

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + u + w_0 \,, \tag{1.5}$$

whre both u and w_0 have definite dimensions (d and d', respectively).

In such a model each term breaking the chiral symmetry also breaks the dilatation symmetry and vice versa. Thus the intriguing link between the two broken symmetries is closer. This aspect is even more emphasized if one can make predictions concerning the relation between d and d'. We have the following situation. Each term breaking chiral symmetry is of the type $(n, \bar{n})$ (symmetrized if necessary), and each term has a definite dimension, say $d(n)$, breaking also scale invariance. As we pass from $n = 3$ to $n = 6$ or 8 how does $d(n)$ change?

As will be seen in Section 3, *even without making doubtful approximations* (*con-*

cerning dominance of certain meson poles and so on), just by exploiting certain fundamental positivity properties one can already obtain quite interesting constraints concerning d and d'.

2. The Symmetric Algebra

Case I $(6, \bar{6}) \otimes (\bar{6}, 6)$. Let us start by considering $(6, \bar{6})$. All the necessary formalism and results for the sextets are given in Appendix A. In terms of the T-product for the sextet (A21), the one for $(6, \bar{6})$ is defined as

$$(x, \bar{y})_T(x', \bar{y}') = (x_T x', \bar{y}_T \bar{y}'). \tag{2.1}$$

We want to look for the vectors satisfying

$$(x, \bar{y})_T (x, \bar{y}) = \lambda(x, \bar{y}) \tag{2.2}$$

(The T-product introduced in Appendix A has of course nothing to do with the time ordered product.)

With a view to eventual application in the study of strong chiral symmetry breaking let us start by selecting out in particular the vectors commuting with $U(2)$ subgroup of isospin and hypercharge [20].

Using the (ij) basis (A.1) let us define (with the standard $SU(2)$ phase conventions)

$$\begin{aligned}(\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{3}}[(11)(\overline{11}) - (12)(\overline{12}) + (22)(\overline{22})],\\ (\beta) &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(23)(\overline{23}) - (31)(\overline{31})],\\ (\gamma) &= (33)(\overline{33}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Any vector of $(6, \bar{6})$ having $U(2)$ in its little group must be a linear combination of these three vectors.

Now, using (A27) and the corresponding results for $(\bar{i}\bar{j})$, we obtain at once,

$$\begin{aligned}&c[(\gamma) + a\sqrt{3}(\alpha) + b\sqrt{2}(\beta)]_T\, c[(\gamma) + a\sqrt{3}(\alpha) + b\sqrt{2}(\beta)]\\ &\quad = c^{*2}[\tfrac{3}{2}a^{*2}(\gamma) + \tfrac{1}{2}(2a^* + b^{*2})\sqrt{3}(\alpha) + \tfrac{3}{2}a^*b^*\sqrt{2}(\beta)].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hence the required solutions are

(1) $a = 0 = b$

$$(\gamma)_T(\gamma) = 0. \tag{2.5}$$

The little group is $SU^+(2) \times SU^-(2) \times U^d(1)$.

(2) $a = e^{i2\varphi}, \quad b = e^{i\varphi}$

$$[(\gamma) + e^{i2\varphi}\sqrt{\bar{3}}(\alpha) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\beta)]_T\,[(\gamma) + e^{i2\varphi}\sqrt{3}(\alpha) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\beta)]$$
$$= \tfrac{3}{2}e^{-i4\varphi}[(\gamma) + e^{i2\varphi}\sqrt{3}(\alpha) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\beta)]. \tag{2.6}$$

With suitable phase conventions [21] $SU(3)^d$ becomes the little group for $\varphi = 0$. Moreover, since

$$((\gamma), (\alpha), (\beta)) \xrightarrow{e^{i(\varphi/2)Y^5}} e^{-i(4\varphi/3)}((\gamma), e^{i2\varphi}(\alpha), e^{i\varphi}(\beta)), \tag{2.7}$$

the different values of φ are related through Y^5 conjugations.

(3) $b = 0, \quad 3aa^* = 2$

$$[(\gamma) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\alpha)]_T\,[(\gamma) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\alpha)] = e^{-i2\varphi}[(\gamma) + e^{i\varphi}\sqrt{\bar{2}}(\alpha)]. \tag{2.8}$$

The little group is $U^d(2)$. The different φ values are again related through Y^5 conjugations.

Though we have given the above solutions in a general form, eventually, in order to ensure simultaneously hermiticity and parity invariance, we will only be interested in real values of a, b, c, in considering the $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ combination

$$\{c[(\gamma) + a\sqrt{\bar{3}}(\alpha) + b\sqrt{\bar{2}}(\beta)] + \text{h.c.}\}. \tag{2.9}$$

Let us denote the $Y = 0, I = 0$ member of (1), (8), (27) dimensional representation of $SU(3)$ by w_0, w_8, w_{27}, respectively. Then it can be shown that [22],

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}w_0 &= \sqrt{\bar{3}}(\alpha) + \sqrt{\bar{2}}(\beta) + (\gamma), \\
\sqrt{30}w_8 &= 2\sqrt{\bar{3}}(\alpha) - \sqrt{\bar{2}}(\beta) - 4(\gamma), \\
\sqrt{30}w_{27} &= \sqrt{\bar{3}}(\alpha) - 3\sqrt{\bar{2}}(\beta) + 3(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Hence,

$$[a\sqrt{\bar{3}}(\alpha) + b\sqrt{\bar{2}}(\beta) + c(\gamma)] = xw_0 + yw_8 + zw_{27}, \tag{2.11}$$

where

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}x &= (3a + 2b + c), \\
\sqrt{30}y &= (6a - 2b - 4c), \\
\sqrt{30}z &= (3a - 6b + 3c).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

This formula (2.12) will be particularly useful in the applications studied in Section 3.

Case II (8, 8). In this case the symmetrical "V" algebra for (8) of Michel and Radicati [1] is directly related to the d-coefficients of Gell-Mann. The corresponding C.G. coefficients are also available for the $(Y\,I\,I_3)$ basis [21].

Using directly the $(Y\,I\,I_3)$ notation the required $U^d(2)$ invariant combinations are

$$\begin{aligned}
\sqrt{3}(\alpha) &= (0\ 1\ 1)(0\ 1\ -1) - (0\ 1\ 0)(0\ 1\ 0) + (0\ 1\ -1)(0\ 1\ 1),\\
\sqrt{2}(\beta_1) &= (1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})(-1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}) - (1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})(-1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}),\\
\sqrt{2}(\beta_2) &= (-1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2})(1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}) - (-1\ \tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2})(1\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}),\\
(\gamma) &= (0\ 0\ 0)(0\ 0\ 0).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Let

$$\sqrt{2}(\beta) = (\beta_1) - (\beta_2). \tag{2.14}$$

Then (α), (β), (γ) are the parity and $U^d(2)$ invariant combinations. Corresponding to (2.4) we now obtain

$$\begin{aligned}
&c[(\gamma) + a\ \sqrt{3}(\alpha) + b\ \sqrt{2}(\beta)]_V\, c[(\gamma) + a\ \sqrt{3}(\alpha) + b\ \sqrt{2}(\beta)]\\
&\quad = \frac{c^2}{10}\,[(2 + 6a^2 + b^2)(\gamma) + (4a - 3b^2)\ \sqrt{3}(\alpha) + (b - 9ab)\ \sqrt{2}(\beta)].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

In this case there is no nilpotent.

The idempotent solutions of (2.2) are given by

(1) $a = 0 = b$

$$(\gamma)_V\,(\gamma) = \tfrac{1}{5}(\gamma). \tag{2.16}$$

The little group is $U^+(2) \times U^-(2)$.

(2) $a = -1, \quad b = \pm\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{8}}\,[(\gamma) - \sqrt{3}(\alpha) \mp 2(\beta))_V \frac{1}{\sqrt{8}}\,[(\gamma) - \sqrt{3}(\alpha) \mp 2(\beta)]\\
&\quad = \frac{1}{8}\,[(\gamma) - \sqrt{3}(\alpha) \mp 2(\beta)].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

With our phase conventions $b = -\sqrt{2}$ gives $SU^d(3)$ as the little group. Since

$$((\alpha), (\beta), (\gamma)) \xrightarrow{e^{i(\varphi/2)\,Y^5}} ((\alpha), e^{i\varphi}(\beta), (\gamma)), \tag{2.18}$$

the other case is obtained through a Y^5 conjugation.

(3) $b = 0, \quad a = \pm 1/\sqrt{3}$

$$\tfrac{1}{2}\{(\gamma) \pm (\alpha)\}_V \tfrac{1}{2}\{(\gamma) \pm (\alpha)\} = \tfrac{1}{16}\{(\gamma) \pm (\alpha)\}. \tag{2.19}$$

The little group is $U^d(2) \times U^-(1)$.

(4) $$a = -\tfrac{1}{8}, \quad b = \pm i(\sqrt{6}/9). \tag{2.20}$$

We will not explicitely write down this solution, of lesser interest to us since the coefficients do not satisfy the hermiticity condition. The factor i in b (2.20) can be removed through a Y^5 conjugation, but then the solution (2.17) no longer has real coefficients after such a conjugation.

Let us now examine the $SU^d(3)$ content of (α), (β), (γ). In the reduction

$$(8) \otimes (8) = (1) \oplus (8)_s \oplus (8)_a \oplus (10) \oplus (\overline{10}) \oplus (27), \tag{2.21}$$

only (1), $(8)_s$, (27) are symmetric under permutation of the two (8). Hence using notation similar to that of (2.10) we obtain

$$\begin{aligned} \sqrt{8}w_0 &= (\gamma) - \sqrt{3}(\alpha) - 2(\beta), \\ \sqrt{3}w_8 &= (\gamma) + \sqrt{3}(\alpha) - (\beta), \\ \sqrt{40}w_{27} &= 3\sqrt{3}(\gamma) - (\alpha) + 2\sqrt{3}(\beta). \end{aligned} \tag{2.22}$$

[Here w_8 refers to $(8)_s$.] Again for a general linear combination we have,

$$a\sqrt{3}(\alpha) + b(\beta) + c(\gamma) = xw_0 + yw_8 + zw_{27}, \tag{2.23}$$

where

$$\begin{aligned} \sqrt{8}x &= -3a - 2b + c, \\ \sqrt{3}y &= 3a - b + c, \\ \sqrt{\frac{40}{3}}z &= -a + 2b + 3c. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Like (2.12), (2.24) will also find application in Section 3.

3. Broken Chiral and Scale Invariance: (Positivity Constraints on Dimensions)

In this section we will study certain consequences of a model of broken chiral and dilatation symmetry with a Hamiltonian density (1.5)

$$\theta_{00} = \bar{\theta}_{00} + u_0 + cu_8 + w_0, \tag{3.1}$$

where u $(=u_0 + cu_8)$ has a dimension d under dilatation and w_0 [the $SU(3)$ scalar belonging either to $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ or to $(8, 8)$] has a dimension d'. Namely, if D is the generator of dilatations

$$i[D, \theta_{00}] = 4\theta_{00} + du + d'w_0 . \tag{3.2}$$

The motivations for studying such a model has already been explained in the introduction. Let us now proceed directly to examine certain consequences.

We define, for the axial currents,

$$\Delta_i(q) = -i \int e^{iqx} \langle 0 \mid T(\partial \cdot A_i(x)\, \partial \cdot A_i(0)) \mid 0 \rangle, \tag{3.3}$$

where, as usual, in terms of the axial charges F_i^5,

$$\partial \cdot A_i(x) = i[(u + w_0), F_i^5]. \tag{3.4}$$

Using standard techniques,

$$\Delta_i(0) = \langle 0 \mid [F_i^5, [F_i^5, (u + w_0)]] \mid 0 \rangle. \tag{3.5}$$

Thus we obtain, assuming $U(2)$ symmetry of the vacuum and denoting $\langle 0 \mid u_0 \mid 0 \rangle$ as $\langle u_0 \rangle$ and so on

$$\begin{aligned}
\Delta_\pi(0) &= \frac{(c + \sqrt{2})}{3} (\sqrt{2}\, \langle u_0 \rangle + \langle u_8 \rangle) + \langle \Sigma_w \rangle_\pi && \text{(for } i = 1, 2, 3), \\
\Delta_K(0) &= \frac{(-c + 2\sqrt{2})}{3\sqrt{2}} \left(\langle u_0 \rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle u_8 \rangle \right) + \langle \Sigma_w \rangle_K && \text{(for } i = 4, 5, 6, 7), \\
\Delta_\eta(0) &= \frac{1}{3} ((2 - \sqrt{2}c)\langle u_0 \rangle + (3c - \sqrt{2})\langle u_8 \rangle) + \langle \Sigma_w \rangle_\eta && \text{(for } i = 8),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

where the $\langle \Sigma_w \rangle$ terms are to be calculated separately for the two cases considered. Using standard matrix elements of the generators of $SU(3)$ and the results (2.10), (2.12), (2.22), and (2.24) we obtain the following results [23]:

For $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$:

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma_w \rangle_\pi &= \frac{5}{3} \langle w_0 \rangle + \frac{7}{3\sqrt{5}} \langle w_8 \rangle + \frac{1}{3\sqrt{5}} \langle w_{27} \rangle, \\
\langle \Sigma_w \rangle_K &= \frac{5}{3} \langle w_0 \rangle - \frac{7}{6\sqrt{5}} \langle w_8 \rangle - \frac{1}{\sqrt{5}} \langle w_{27} \rangle, \\
\langle \Sigma_w \rangle_\eta &= \frac{5}{3} \langle w_0 \rangle - \frac{7}{3\sqrt{5}} \langle w_8 \rangle + \frac{3}{\sqrt{5}} \langle w_{27} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

For (8, 8):

$$\langle \Sigma_w \rangle_\pi = \frac{3}{2}\langle w_0\rangle - \frac{6}{\sqrt{40}}\langle w_8\rangle - \frac{1}{2\sqrt{15}}\langle w_{27}\rangle,$$

$$\langle \Sigma_w \rangle_K = \frac{3}{2}\langle w_0\rangle + \frac{3}{\sqrt{40}}\langle w_8\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\langle w_{27}\rangle, \tag{3.8}$$

$$\langle \Sigma_w \rangle_\eta = \frac{3}{2}\langle w_0\rangle + \frac{6}{\sqrt{40}}\langle w_8\rangle - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}\langle w_{27}\rangle.$$

A definition exactly similar to (3.3) involving the strangeness changing *vector currents* leads to the result (for $i = 4, 5, 6, 7$),

$$\Delta_\kappa(0) = \tfrac{3}{4}c\langle u_8\rangle. \tag{3.9}$$

It is to be noted carefully that though we are using, as a matter of convenient notations, the subscripts π, K, η, κ, *we are not assuming that* $\Delta_i(0)$ *is dominated by the pole of the corresponding meson. We need not assume this even for* Δ_π *where it is known to work fairly well.* We propose, eventually, to use only one fundamental property of (3.3), (3.5), and (3.9). It is well known that the corresponding spectral functions are all nonnegative, and even strictly positive when the current concerned is not conserved [24]. *In this paper we will exploit the fact that the* Δ*'s introduced are all positive*, leaving in any case a sufficient margin for uncertainties involved in usual approximations. For certain purposes it will be convenient to adopt the parametrization [25]

$$\Delta_K = 12\xi_K{}^2\Delta_\pi\,, \qquad \Delta_\eta = 15\xi_\eta{}^2\Delta_\pi \tag{3.10}$$

(remembering $m_K{}^2 \simeq 12m_\pi{}^2$, $m_\eta{}^2 \simeq 15m_\pi{}^2$).

Let us now consider the quadruple commutator

$$\begin{aligned} X &\equiv \langle 0 \mid [F_3{}^5, [F_3{}^5, [F_3{}^5, [F_3{}^5, (u + w_0)]]]] \mid 0\rangle \\ &= [(c + \sqrt{2})/3](\sqrt{2}\,\langle u_0\rangle + \langle u_8\rangle) + R_w\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

where for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$:

$$R_w = \frac{17}{3}\langle w_0\rangle + \frac{31}{3\sqrt{5}}\langle w_8\rangle + \frac{10}{3\sqrt{5}}\langle w_{27}\rangle \tag{3.12}$$

and for (8, 8),

$$R_w = \frac{9}{2}\langle w_0\rangle - \frac{3}{2}\sqrt{10}\,\langle w_8\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\,\langle w_{27}\rangle. \tag{3.13}$$

We explain in Appendix B the connection of (3.11) with $\pi\pi$-scattering and also why introducing the parametrization

$$X = (1 + \delta)\, \Delta_\pi \tag{3.14}$$

one may reasonably expect δ to be small and even possibly not too far from zero. Concerning δ, as *defined* by (3.14) we are again prepared to leave a considerable margin of uncertainty. From (3.6) and (3.14) one obtains, by definition,

$$\delta\Delta_\pi = R_w - \langle \Sigma_w \rangle_\pi \,. \tag{3.15}$$

Hence for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$,

$$\delta\Delta_\pi = 4\langle w_0 \rangle + \frac{8}{\sqrt{5}} \langle w_8 \rangle + \frac{4}{\sqrt{5}} \langle w_{27} \rangle \tag{3.16}$$

and for $(8, 8)$

$$\delta\Delta_\pi = 3\langle w_0 \rangle - \frac{12}{\sqrt{5}} \langle w_8 \rangle + \frac{3}{\sqrt{15}} \langle w_{27} \rangle. \tag{3.17}$$

At this point let us introduce some further results following from the concept of broken dilatation symmetry.

Along with (3.1) and (3.2) the trace of the energy momentum tensor is given by [26]

$$\theta_\mu{}^\mu \equiv \theta = (4 - d)\, u + (4 - d')\, w_0 \,. \tag{3.18}$$

The symmetry of the vacuum with respect to such operators gives

$$\langle \theta \rangle = (4 - d)\langle u \rangle + (4 - d')\langle w_0 \rangle = 0. \tag{3.19}$$

This constraint turns out to be a very strong one. Introducing the definition

$$x = (4 - d')/(4 - d) \tag{3.20}$$

we will write

$$\langle u \rangle + x\langle w_0 \rangle = 0. \tag{3.20}$$

We have also [27], in terms of dilatation current,

$$\theta(x) = \partial^\mu D_\mu(x). \tag{3.21}$$

Hence, defining

$$\Delta_\theta(q) = -i \int e^{iq\cdot x} \langle 0 \mid T(\theta(x)\, \theta(0)) \mid 0 \rangle \tag{3.22}$$

we have, using standard techniques,

$$\Delta_\theta(0) = i\langle 0 \mid [D, \theta(0)] \mid 0\rangle. \tag{3.23}$$

From (3.2), (3.18), (3.19), and (3.23) we obtain (with $u = u_0 + cu_8$)

$$\Delta_\theta(0) = (4-d)\, d\langle u\rangle + (4-d')\, d'\langle w_0\rangle \tag{3.24}$$

$$= (4-d)(d-d')\langle u\rangle \tag{3.25}$$

$$= (4-d')(d'-d)\langle w_0\rangle. \tag{3.26}$$

As has been noted in Ref. 17, unless there are at least two scale symmetry breaking terms, we see from (3.19) and (3.24) (putting $w_0 = 0$ for example or $d' = d$) that

$$\Delta_\theta(0) = 0. \tag{3.27}$$

But since we are assuming that dilatation symmetry is broken, the arguments [preceding Eq. (3.10)] concerning positivity apply to $\Delta_\theta(0)$ also. Hence, we have to introduce in such models *at least two* dilatation symmetry breaking terms with *different* dimensions ($d \neq d'$). We have already explained in the introduction our reasons for choosing the second term (w_0) also to be chiral noninvariant in contrast to the model (1.3) of Refs. 14–16.

Again it must be noted that in contrast to what is often done, we are not assuming Δ_θ to be dominated by the pole of some σ-meson. We will again use only the positivity of Δ_θ.

We will now examine the constraints introduced by the positivity of the different Δ's. More particularly *we will examine which values of d and d' are admissible for different values of c.*

The dimensions of the chiral symmetry breaking terms are usually supposed to be restricted to the values (see Ref. 16 and others quoted there)

$$1, 2, 3.$$

Though we will not make the usual approximations that are made in discussing such values (and though we have two such terms), we will adopt the point of view that these are indeed the most interesting possibilities and limit ourselves to the cases [28]

$$(d, d') = (1, 3), (2, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 1) \tag{3.28}$$

when the respective values of x (3.20) are

$$x = 1/3, 1/2, 2/3, 3/2, 2, 3. \tag{3.29}$$

We have excluded the cases with $d = d'$ since then from (3.26) $\Delta_\theta = 0$.

At this point we adopt the following procedure. We express the vacuum expectation values (in particular $\langle w_0 \rangle$ and $\langle u_8 \rangle$) in terms of Δ_π, Δ_K, Δ_η and the parameters δ, c, x. Then we substitute the expressions obtained for $\langle u_8 \rangle$ and $\langle w_0 \rangle$ in (3.9) and (3.16), namely,

$$\Delta_\kappa(0) = \tfrac{3}{4}c\langle u_8 \rangle, \tag{3.30}$$

$$\Delta_\theta(0) = (4 - d')(d' - d)\langle w_0 \rangle. \tag{3.31}$$

The general solution is given in Appendix C. Let us start by considering the situation corresponding to certain particularly interesting values of c.

Case I. $c = -\sqrt{2}$. In this case the two terms of

$$H' = u + w_0 \qquad (u = u_0 - \sqrt{2}u_8)$$

have particularly clear group-theoretical significance. We have the situation that each of the two major types of chiral symmetry breaking terms [one conserving $SU^+(2) \times SU^-(2)$ and the other conserving $SU(3)$] is associated with one representation of the type $(n, \bar{n})$ (symmetrized if necessary) and each has a different dimension (d, d') breaking scale invariance. For this value of c we obtain fairly simple expression for $\langle w_0 \rangle$ and $\langle u_8 \rangle$. For $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$:

$$4(4 - x)\langle w_0 \rangle = 3\Delta_\eta + (15 - \tfrac{7}{2}\delta)\,\Delta_\pi\,, \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned} 3(4 - x)\sqrt{2}\langle u_8 \rangle = {} & (16\Delta_K - 6\Delta_\eta - 38\Delta_\pi) + x(17\Delta_\pi + 3\Delta_\eta - 4\Delta_K) \\ & + (5 - 2x)\tfrac{7}{3}\delta\Delta_\pi\,. \end{aligned} \tag{3.33}$$

For (8, 8):

$$4x\langle w_0 \rangle = -3\Delta_\eta + 3(3 - \delta)\,\Delta_\pi\,, \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} 15\sqrt{2}x\langle u_8 \rangle = {} & 45(\Delta_\eta - 3\Delta_\pi) + x(20\Delta_K - 15\Delta_\eta + 75\Delta_\pi) \\ & + 5(9 - 4x)\,\delta\Delta_\pi\,. \end{aligned} \tag{3.35}$$

It is easy to convince oneself, particularly by using the parametrization (3.10), namely,

$$\Delta_K = 12\xi_K{}^2\Delta_\pi\,, \qquad \Delta_\eta = 15\xi_\eta{}^2\Delta_\pi \tag{3.36}$$

that [25] for small δ and

$$\xi_K{}^2 \approx \xi_\eta{}^2$$

it is not possible (for either $(6, \bar{6})$ *or* $(8, 8)$ *to ensure the positivity of both* Δ_κ *and* Δ_θ *as given by* (3.31) (noting that $\langle u_8 \rangle$ and $\langle \Delta_\kappa \rangle$ are of opposite signs).

For (8, 8) this negative conclusion is particularly evident. Let us examine the $(6, \bar{6})$ case more closely. From (3.32), (3.29),

$$\langle w_0 \rangle > 0 \tag{3.37}$$

and hence from (3.31) $\Delta_\theta > 0$ for $d' > d$ or $x < 1$. For $x = 1/3$, from (3.33)

$$11\ \sqrt{2}\ \langle u_8 \rangle \simeq \left[75\left(2,35 - \frac{\xi_\eta^{\,2}}{\xi_K^{\,2}}\right)\xi_K{}^2 - 32,3 + 10,1\delta\right]\Delta_\pi . \tag{3.38}$$

Hence for $\Delta_\kappa > 0$, i.e., $\langle u_8 \rangle < 0$, we must have rather improbable values of the parameters $\xi_K{}^2$, $\xi_\eta{}^2$, δ. For $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ this tendency is accentuated.

Thus, on the whole, we may conclude that for $c = -\sqrt{2}$, our model is not likely to give solutions consistent with the positivity condition for the values of x given by (3.29). (*See however the remarks concerning the singular values of c*).

Case II. $c = -(\sqrt{2}/7) \simeq -0,2$. It is also of interest to examine the situation when c is small according to the original suggestion of Gell-Mann [3, 29]. Somewhat arbitrarily we have chosen the value

$$c \simeq -0,2. \tag{3.39}$$

Since the corresponding expressions are much less simple, instead of examining each possibility separately let us only state the consequences, which are easily verifiable.

Substitution of $c = -0,2$ and the different values of x (3.29) in the general solutions of Appendix C, lead to the following results.

For a fairly "reasonable" range of values of the parameters it is possible to have

$$\Delta_\theta(0) > 0,$$
$$\Delta_\kappa(0) > 0$$

for all the following alternatives:

$$\text{i.e.,} \qquad \begin{gathered} x = 1/3,\ 1/2,\ 2/3,\ 3, \\ (d, d') = (1, 3),\ (2, 3),\ (1, 2),\ (3, 1). \end{gathered} \tag{3.40}$$

The values $x = 3/2$ and 2 are still excluded.

The value $x = 3$ and the three values with $x < 1$ in (3.40) are distinguished by the fact that for $x < 1$, $\langle u_8 \rangle$, Δ_κ and hence also $\langle w_{27} \rangle$ [see (C3)] are much smaller than for $x = 3$. This fact may eventually provide a criterion for choosing between the two sets. The three values $x = 1/3,\ 1/2,\ 2/3$, lead to fairly similar consequences concerning the properties we have studied.

Case III. Singular values of c. As noted in Appendix C the denominators of the general expressions for $\langle w_0 \rangle$ and $\langle u_8 \rangle$ become zero for certain values of c for a given value of x. Such values of c are of course to be avoided and hence impose additional constraints on the joint values of the parameters c and x.

Such values are moreover associated with a change of sign of the denominator, which is of interest for our purposes.

It is to be noted in particular that the value $c = -\sqrt{2}$ is quite near some of the critical values in (C18). It is amusing to note that the exact value $-\sqrt{2}$ and the value $-1, 25$ [4] often considered in pure $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ models are on opposite sides of certain critical values. For the latter value the solutions for $(8, 8)$ with $x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ become admissible. At this point the consequences of $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$ are different.

However, we do not propose to undertake a detailed analysis of the variation of the different magnitudes with c. Such an analysis would have been of particular interest if we could assign fairly precise values to the other parameters involved. But, in this paper, we do not want to get involved in drastic approximations.

It is to be noted however that even for a small value of c ($\simeq -0, 2$) *our model is quite compatible with results usually obtained through pion* PCAC *and pole dominance.* (Nothing prevents us from using the corresponding results for Δ_π and $\pi\pi$ scattering.)

As emphasized by the authors of Ref. [29], while a Hamiltonian "almost conserving" $SU(2) \times SU(2)$ [30] makes the role of the small pion mass rather evident, it leaves the well-known successes of $SU(3)$ to be explained in a much more indirect fashion. The situation is of course reversed for a Hamiltonian "almost conserving" $SU(3)$.

Though we are not using explicitly either strong or "weak" PCAC [29], the consequences of small values of c in our model is worth noting. Other values of c are however not excluded [31].

4. Conclusion

Evidently we have studied only a very limited range of consequences of our symmetry breaking model. This limitation has been deliberately imposed for the following reasons. The postulates concerning definite dimensions of the symmetry breaking terms and the consequent expressions (3.18)–(3.26) introduce already quite strong constraints. We have tried to examine their consequences without mixing them up with a whole series of more or less doubtful approximations, when the different intrinsic effects are inextricable. Even the correct discussion of mass formulas involves, in this context, estimation of the scalar meson poles and other factors [13, 19] and hence are of a different degree of reliability.

It will be seen that we have, from the beginning, abandonned the idea of a $SU(3)$ symmetric vacuum [32]. The amount of breaking of this symmetry varies with values of the different parameters and it is possible to diminish, for example, $\langle w_{27} \rangle$ by an order of magnitude by suitably varying c and x.

It will also be noticed that (so far as we have examined them) the consequences of $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$ are often though not always fairly analogous. Other tests will be needed in order to choose between them.

So far as our study of the symmetric algebras is concerned, of the idempotents and nilpotents constructed we have only utilized w_0. Here again a more complete investigation remains to be done.

Meanwhile we have preferred to present the two fairly self contained parts of our work side by side since we are interested in the light shed on the properties of a term like w_0 from different points of view.

We would like to mention finally that if the constraints due to our use of broken scale invariance should eventually prove to be too strong, they can be at once relaxed by adding to (3.1) a c-number term (as in Refs. 14–16).

While such modifications are always possible, it is, of course, of interest to examine first the relatively restrictive case.

Appendix A

The Sextet

The sextets of $SU(3)$ ((6) and $(\bar{6})$) can be conveniently represented on the space of 3×3 *symmetric* complex matrices ($\mathbb{R}^{12}$).

Corresponding to the quark notation we have a convenient basis for (6), which may be denoted as

$$(ij) = (ji) \qquad (i, j = 1, 2, 3) \tag{A1}$$

with

$$(pp) \equiv (11) = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} (np + pn) \equiv \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{pmatrix} = (12) = (21) \tag{A2}$$

and so on in an evident notation. The normalization for the vectors is

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(x^{+}x) = 1. \tag{A3}$$

For $(\bar{6})$ the basis elements are $(\overline{11})$ corresponding to $(\overline{pp})$ and so on.

Another useful choice of basis elements is provided by the *six symmetric* (and real) λ-matrices of Gell-Mann, namely

$$\lambda_\alpha \text{ with } \alpha = 0, 1, 3, 4, 6, 8. \tag{A4}$$

(We adopt the convention of using the Greek subscript when we consider only the symmetric subset of the λ_i's.) The relation between the two bases is quite simple.

Transformation Laws

Consider a vector

$$x = \sum_{\alpha} (a_\alpha + ib_\alpha)\,\lambda_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, 3, 4, 6, 8). \tag{A5}$$

Under a unitary transformation U of $SU(3)$ x is transformed into another symmetric matrix

$$x' = UxU^{\sim} \tag{A6}$$

("$\sim$" denotes transposition). Let us now consider (6) in particular, the corresponding vectors of $(\bar{6})$ being always obtained through complex conjugation.

For infinitesimal transformations we have the algebra (with $d_{0\beta\gamma} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\delta_{\beta\gamma}$)

$$2iD(\lambda_i)\,\lambda_\alpha = \{\lambda_i\,,\,\lambda_\alpha\} = 2d_{i\alpha\beta}\lambda_\beta \qquad \text{for} \quad i = 1, 3, 4, 6, 8 \tag{A7}$$

and

$$2iD(\lambda_i)\,\lambda_\alpha = [\lambda_i\,,\,\lambda_\alpha] = 2if_{i\alpha\beta}\lambda_\beta \qquad \text{for} \quad i = 2, 5, 7. \tag{A8}$$

These results can be unified using the notation

$$2iD(\lambda_i)\,\lambda_\alpha = (\lambda_i\lambda_\alpha + \lambda_\alpha\tilde{\lambda}_i) = 2g_{i\alpha\beta}\lambda_\beta$$
$$(i = 1,\ldots, 8, \quad \alpha, \beta = 0, 1, 3, 4, 6, 8) \tag{A9}$$

where

$$g_{i\alpha\beta} = (d_{i\alpha\beta} + if_{i\alpha\beta}). \tag{A10}$$

$g_{i\alpha\beta}$ thus defined is always either purely real or purely imaginary. Useful properties of the 6×6 g-matrices can be derived using those of the d- and f-matrices. Thus for example we obtain

$$[g_i\,,\,g_j] = -if_{ijk}g_k$$

and (A11)

$$\mathrm{Tr}(g_i g_j) = \tfrac{5}{2}\delta_{ij}\,.$$

It is remarkable that the constants of structure $g_{i\alpha\beta}$ play also the role of the C.G. coefficients in the extraction of (8) from a direct product of (6) and $(\bar{6})$.

This is seen as follows. Let x and y be two vectors of (6). Then

$$z = (xy^\dagger + yx^\dagger) - \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(xy^\dagger + yx^\dagger)\,\mathbb{1}$$

and (A12)

$$z' = i(xy^\dagger - yx^\dagger) - \tfrac{i}{3}\mathrm{Tr}(xy^\dagger - yx^\dagger)\,\mathbb{1}$$

are two traceless hermitian 3×3 matrices transforming as

$$(z, z') \xrightarrow{U} U(z, z')\, U^\dagger \tag{A13}$$

("†" denotes hermitian conjugation). Thus z, z' are the symmetric and antisymmetric combinations transforming as vectors of (8).

Now, writing

$$x = \sum_\alpha x_\alpha \lambda_\alpha\,, \qquad y = \sum_\beta y_\beta \lambda_\beta\,, \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 4, 6, 8), \tag{A14}$$

we obtain

$$z = \sum_{i=1}^{8} z_i \lambda_i \tag{A15}$$

with

$$z_i = g_{i\alpha\beta} x_\alpha y_\beta{}^* + (\text{h.c.}). \tag{A16}$$

Similarly,

$$z_i' = i[g_{i\alpha\beta} x_\alpha y_\beta{}^* - (\text{h.c.})]. \tag{A17}$$

The "T-Product" for the Sextet

Let us now consider the symmetric algebra or the T-product for the sextet.

It turns out that this T-product is formally exactly the same as the one given by Michel and Radicati [1] *for* $(3, \bar{3})$. This is so in spite of the fact that fundamentally the situation is quite different, since for (6) or $(\bar{6})$ we are concerned with $SU(3)$ only whereas for $(3, \bar{3})$ we are considering $SU(3) \times SU(3)$.

In order to understand this situation let us briefly recapitulate the relevant properties of the $(3, \bar{3})$ case [1].

In this case the basis space is provided by the general 3×3 complex matrices $(\mathbb{R}^{18})$.

Under a general $SU(3)^{(+)} \times SU(3)^{(-)}$ transformation

$$U_+ \times U_- = e^{-i(\varphi/2)a_+} \times e^{-i(\varphi/2)a_-} \tag{A18}$$

such matrices are transformed as

$$m \to U_+ m U_-{}^\dagger. \tag{A19}$$

The Lie algebra is

$$\begin{aligned} 2iD(a_+ \oplus a_-)\, m &= (a_+ m - m a_-) \\ &= [a, m] + \{a', m\}, \end{aligned} \tag{A20}$$

where

$$a_\pm = a \pm a'.$$

The fact that, in the reduction of $\{(3, \bar{3}) \otimes (3, \bar{3})\}$ we have only once $(\bar{3}, 3)$, permits us to construct a new vector of the representation $(3, \bar{3})$ out of two given ones. The required symmetric product is [1]

$$x_T y = \tfrac{1}{2}[\mathrm{Tr}\, x^\dagger \,\mathrm{Tr}\, y^\dagger - \mathrm{Tr}(x^\dagger y^\dagger)]\, \mathbb{1} - \tfrac{1}{2} x^\dagger \,\mathrm{Tr}\, y^\dagger - \tfrac{1}{2} y^\dagger \,\mathrm{Tr}\, x^\dagger + \tfrac{1}{2}\{x^\dagger, y^\dagger\}. \tag{A21}$$

[The presence of the hermitic conjugation on the right is necessitated by the fact that the reduction gives us, to start with, a $(\bar{3}, 3)$ vector and not one of $(3, \bar{3})$.]

The T-product ensures the transformation property [1]

$$(U_+ x U_-^\dagger)_T\, (U_+ y U_-^\dagger) = U_+ (x_T y)\, U_-^\dagger. \tag{A22}$$

Let us now note that introducing the constraint

$$U_+ = U = U_-^* \tag{A23}$$

("*" denoting complex conjugation) we obtain as a special case of (A19),

$$m \to U m \tilde{U} \tag{A24}$$

which is the law (A6) for (6).

Moreover it is evident from (A21) that if

$$x = \tilde{x}, \qquad y = \tilde{y} \qquad \text{and} \qquad z = x_T y$$

then

$$z = \tilde{z}. \tag{A25}$$

From (A24), (A25) it is not difficult to see that considering only the symmetric matrices of $\mathbb{R}^{12}$ and defining the symmetric algebra for 6 (or $\bar{6}$) exactly as in (A21) we assure the required covariance, namely

$$(U x \tilde{U})_T\, (U y \tilde{U}) = U (x_T y)\, \tilde{U}. \tag{A26}$$

The correspondence between $(3, \bar{3})$ and (6) can be seen in more detail in terms of the respective Lie algebras. The result (A26) may also be established independently.

For the purposes of calculation it is extremely useful to note the following simple results of the (ij) basis vectors (A1).

Let (i, j, k) be the indices 1, 2, 3 in cyclic order. Then

$$\begin{aligned} (ii)_T\,(ii) &= 0, & (ii)_T\,(ij) &= 0, \\ (ii)_T\,(jj) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(kk), & (ij)_T\,(ij) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(kk), \\ (ij)_T\,(jk) &= \frac{1}{2}\,(ki), & (ii)_T\,(jk) &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\,(jk). \end{aligned} \tag{A27}$$

For diagonal matrices (writing the nonzero elements in a row) we obtain

$$(a, b, c)_T\,(a', b', c') = \tfrac{1}{2}((bc' + cb')^*, (ca' + ac')^*, (ab' + ba')^*) \tag{A28}$$

and in particular

$$(a, b, c)_T\,(a, b, c) = (b^*c^*, c^*a^*, a^*b^*). \tag{A29}$$

Let us now consider the solutions of

$$x_T x = \lambda x \tag{A30}$$

for vectors of the sextet. It can be shown (with the help of the results for $(3, \bar{3})$ [1] or independently using special properties of the symmetric matrices) *that all the solutions of* (A30) *can be obtained through* $SU(3)$ *transformations of the two following fundamental types*:

(1)

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2}\,(0, 0, 1), \\ y_T y &= 0. \end{aligned} \tag{A31}$$

The little group is $SU(2)$.

(2)

$$\begin{aligned} n &= c(1, 1, 1), \\ n_T n &= \left(\frac{c^{*2}}{c}\right) n. \end{aligned} \tag{A32}$$

The little group is 0_3 (generated by λ_2, λ_5, λ_7). (In the case of $(3, \bar{3})$ the little groups of y and n are respectively $SU^{(+)}(2) \times SU^{(-)}(2) \times U^d(1)$ and $SU^d(3)$.)

We have also carried through a study of the sextet orbit space in terms of the invariants following the example of Ref. 1. But we will not report the results here, since they will not be utilized directly for studying $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$.

Appendix B

Let us define

$$(2\pi)^4\,\delta(q_1+q_2+q_3+q_4)\,\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta}(q_1q_2q_3q_4)$$
$$= -i\int e^{i(q_1x_1+q_2x_2+q_3x_3+q_4x_4)}\times\frac{(q_1^2-m_\pi^2)(q_2^2-m_\pi^2)(q_3^2-m_\pi^2)(q_4^2-m_\pi^2)}{(f_\pi m_\pi^2)^4}$$
$$\times\langle 0\mid T(\partial\cdot A_\alpha(x_1)\,\partial\cdot A_\beta(x_2)\,\partial\cdot A_\gamma(x_3)\,\partial\cdot A_\delta(x_4))\mid 0\rangle$$
$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta=1,2,3). \quad \text{(B1)}$$

Then extracting a δ-function on the right by using translation invariance and putting $q_1=q_2=q_3=0$, we obtain [33], using standard techniques (with $H'=u+w_0$),

$$f_\pi^4(\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta}(000)-\tilde{M}^{(R)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(000))=\langle 0\mid[F_\delta^5,[F_\gamma^5,[F_\alpha^5,[F_\beta^5,H']]]]\mid 0\rangle$$
$$+\langle 0\mid[F_\delta^5,[F_\beta^5,[F_\alpha^5,[F_\gamma^5,H']]]]\mid 0\rangle$$
$$+\langle 0\mid[F_\gamma^5,[F_\beta^5,[F_\alpha^5,[F_\delta^5,H']]]]\mid 0\rangle, \quad \text{(B2)}$$

where $M^R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ is the sum of three terms, each being the limit (at zero q's) of the integral of the time-ordered product of two σ-terms.

We need not neglect $M^{(R)}$ as is usually done. For our chosen form of H' $(=u_0+cu_8+w_0)$ we obtain

$$f_\pi^4[\tilde{M}_{\alpha\beta\gamma\delta}(0)-\tilde{M}^{(R)}_{\alpha\beta\gamma\delta}(0)]$$
$$=\left[\left(\frac{c+\sqrt{2}}{3}\right)(\sqrt{2}\,\langle u_0\rangle+\langle u_8\rangle)+R_w\right](\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}+\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}), \quad \text{(B3)}$$

where we have for $(6,\bar{6})\oplus(\bar{6},6)$

$$R_w=\frac{17}{3}\langle w_0\rangle+\frac{31}{3\sqrt{5}}\langle w_8\rangle+\frac{10}{3\sqrt{5}}\langle w_{27}\rangle \quad \text{(B4)}$$

and for $(8,8)$

$$R_w=\frac{9}{2}\langle w_0\rangle-\frac{3}{2}\sqrt{10}\,\langle w_8\rangle+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\,\langle w_{27}\rangle. \quad \text{(B5)}$$

Let us consider the usual [34] parametrization of the $\pi\pi$-scattering amplitude

$$\pi_\alpha+\pi_\beta\to\pi_\gamma+\pi_\delta$$

as

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(s, t, u) = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}[A + B(s + u) + ct + \cdots] + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}[A + B(s + t) + cu + \cdots] + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}[A + B(t + u) + cs + \cdots] \quad \text{(B6)}$$

when, in the limit,

$$M_{\alpha\beta\gamma\delta}(000) = A(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}). \quad \text{(B7)}$$

Using the Adler condition and the definition of the scattering lengths a_0, a_2 [34] one obtains

$$A = (32\pi/3)(a_0 + 2a_2)\, m_\pi . \quad \text{(B8)}$$

If one supposes that (B1) *is dominated by the pion poles and if one neglects* $\tilde{M}^{(R)}$ *in* (B2), *then adopting certain smoothness assumptions one obtains comparing* (B3) *and* (B7)

$$f_\pi^4 A = [(c + \sqrt{2})/3](\sqrt{2}\langle u_0\rangle + \langle u_8\rangle) + R_w . \quad \text{(B9)}$$

Comparing (B9) with $\Delta_\pi(0)$ in (3.6) we see that

$$f_\pi^4 A - \Delta_\pi(0) = R_w - \langle \Sigma_w\rangle_\pi . \quad \text{(B10)}$$

When the w terms are absent ($H' = u_0 + cu_8$), using previously mentioned pion pole dominance assumptions, one obtains a *prediction* [33, 34], which becomes with our conventions

$$A = (1/f_\pi^4)\,\Delta_\pi = m_\pi^2/f_\pi^2. \quad \text{(B11)}$$

In our case this would lead to the *constraint*,

$$R_w - \langle \Sigma_w\rangle_\pi = f_\pi^4 A - \Delta_\pi(0), \quad \text{(B12)}$$

where A is given by (B8). Since we do not want to assume pole dominance and the related approximations to start with, we *define*,

$$R_w - \langle \Sigma_w\rangle_\pi = \delta\Delta_\pi , \quad \text{(B13)}$$

where all the necessary corrections are supposed to be absorbed in the parameter δ. As yet it is a definition, and hence an exact relation.

Such a parametrization is only useful if we have at least a rough idea about the magnitude of δ.

For this we may note the results of [35], where the authors calculate a_0 and a_2 using fairly general assumptions, i.e., apart from neglecting $I = 2$ contributions

they use general criterions like analyticity and crossing. The values obtained are quite close to those obtained by Weinberg [34]. Thus we may reasonably expect δ to be quite small. Thus for example, letting δ vary from values close to zero to values of order unity one leaves a plausible margin for uncertainties.

It should be noted however that one experiment quoted in the review of Astier [36] gives a value of a_0 much larger than that obtained by Weinberg. However in our final results the parameter δ usually appears with a coefficient relatively small, which simplifies the situation.

Appendix C

From (3.6), (3.7), (3.8) we obtain

$$\Delta_1 \equiv (3\Delta_\pi + 4\Delta_K + \Delta_\eta) = a_0 \langle w_0 \rangle + \frac{16}{3} \langle u_0 \rangle + \frac{7c}{3} \langle u_8 \rangle, \tag{C1}$$

$$\Delta_2 \equiv (3\Delta_\pi - 2\Delta_K - \Delta_\eta) = a_8 \langle w_8 \rangle + \frac{5\sqrt{2}c}{3} \langle u_0 \rangle + \left(\frac{-c}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{3}\right) \langle u_8 \rangle, \tag{C2}$$

$$\Delta_3 \equiv (-\Delta_\pi + 4\Delta_K - 3\Delta_\eta) = a_{27} \langle w_{27} \rangle - 3c \langle u_8 \rangle. \tag{C3}$$

where for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$

$$a_0 = \frac{40}{3}, \qquad a_8 = \frac{35}{3\sqrt{3}}, \qquad a_{27} = -\frac{40}{3\sqrt{3}}$$

and for (8, 8)

$$a_0 = 12, \qquad a_8 = -\frac{30}{\sqrt{40}}, \qquad a_{27} = \frac{20}{\sqrt{15}}. \tag{C5}$$

We have also the Eqs. (3.16) and (3.17), namely, for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$

$$\delta\Delta_\pi = 4\langle w_0 \rangle + \frac{8}{\sqrt{3}} \langle w_8 \rangle + \frac{4}{\sqrt{3}} \langle w_{27} \rangle \tag{C6}$$

and for (8, 8)

$$\delta\Delta_\pi = 3\langle w_0 \rangle - \frac{12}{\sqrt{10}} \langle w_0 \rangle + \frac{3}{\sqrt{15}} \langle w_{27} \rangle. \tag{C7}$$

Finally, from (3.20),

$$\langle u_0 \rangle + c\langle u_8 \rangle + x\langle w_0 \rangle = 0. \tag{C8}$$

The above system of equations permits us (in each case) to express $\langle u_0 \rangle$, $\langle u_8 \rangle$,

$\langle w_0 \rangle$, $\langle w_8 \rangle$, and $\langle w_{27} \rangle$ in terms of Δ_π, Δ_K, Δ_η (or Δ_1, Δ_2, Δ_3) and the parameters δ, c and x.

This is quite straightforward and we will give explicitly only the general expressions of $\langle w_0 \rangle$ and $\langle u_8 \rangle$ which are of particular interest to us [in view of (3.26) and (3.9)].

Let

$$\langle w_0 \rangle = \frac{N_{(0)}}{D} \qquad \text{and} \qquad \langle u_8 \rangle = \frac{N_{(8)}}{D}. \tag{C9}$$

Then for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$:

$$D = \tfrac{400}{27}[(40\sqrt{2} - 4c - 40\sqrt{2}c^2) + x(-16\sqrt{2} - 11c + 7\sqrt{2}c^2)], \tag{C10}$$

$$N_{(0)} = \tfrac{5}{3}[\tfrac{5}{3}(16\sqrt{2} + 11c - 16\sqrt{2}c^2)\Delta_1 + 48c\Delta_2 - 21c\Delta_3 - 70c\delta\Delta_\pi], \tag{C11}$$

$$\begin{aligned} N_{(8)} = {} & \tfrac{40}{9}[-\tfrac{350}{3}\delta\Delta_\pi + 35\Delta_1 + 80\Delta_2 - 35\Delta_3 \\ & + x(\tfrac{140}{3}\delta\Delta_\pi + 10\sqrt{2}c\Delta_1 - 32\Delta_2 + 14\Delta_3)]; \end{aligned} \tag{C12}$$

for (8, 8):

$$D = \tfrac{400}{27}[9(4\sqrt{2} - 4c - 4\sqrt{2}c^2) + x(-16\sqrt{2} + 7c + 7\sqrt{2}c^2)], \tag{C13}$$

$$N_{(0)} = -100c\delta\Delta_\pi + \tfrac{25}{9}(16\sqrt{2} - 7c - 16\sqrt{2}c^2)\Delta_1 + 80c\Delta_2 + 15c\Delta_3, \tag{C14}$$

$$\begin{aligned} N_{(8)} = {} & 20(-20\delta\Delta_\pi + 5\Delta_1 + 16\Delta_2 + 3\Delta_3) \\ & + \tfrac{80}{9}x(20\delta\Delta_\pi + 5\sqrt{2}c\Delta_1 - 16\Delta_2 - 3\Delta_3). \end{aligned} \tag{C15}$$

Let us note by c_x the value of c (for a given value of x) for which the denominators (C10) and (C13) become zero.

It is convenient to consider the parameter

$$\alpha = c/\sqrt{2} \qquad (\alpha_x = c_x/\sqrt{2}). \tag{C16}$$

We obtain the following critical values (up to second decimal place).

For $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$:

$$\begin{aligned} &\alpha_3 = (-0{,}65;\ -0{,}32), \qquad \alpha_2 = (-0{,}71;\ 0{,}21), \qquad \alpha_{3/2} = (-0{,}72;\ 0{,}38), \\ &\alpha_{2/3} = (-0{,}73;\ 0{,}57), \qquad \alpha_{1/2} = (-0{,}73;\ 0{,}60), \qquad \alpha_{1/3} = (-0{,}73;\ 0{,}63). \end{aligned} \tag{C17}$$

For (8, 8):

$$\begin{aligned} &\alpha_3 \text{ complex}, \qquad \alpha_2 = (-0{,}64;\ 0{,}14), \qquad \alpha_{3/2} = (-0{,}79;\ 0{,}29), \\ &\alpha_{2/3} = (-0{,}94;\ 0{,}44), \qquad \alpha_{1/2} = (-0{,}95;\ 0{,}45), \qquad \alpha_{1/3} = (-0{,}97;\ 0{,}47). \end{aligned} \tag{C18}$$

Even a very small change from the mathematical critical value may however give, due to interplay with the coefficients in the numerator, expressions for $\langle w_0 \rangle$ and $\langle u_8 \rangle$ where the final coefficients are not particularly large. This is evident on comparing (3.34) and (3.35) ($\alpha = -1$) with the critical values (C18).

Acknowledgment

It is a pleasure to thank Professor L. Michel for his interest in the work and for helpful discussions.

References

1. L. Michel and L. A. Radicati, Properties of the breaking of hadronic internal symmetry, *Ann. Physics*, to appear; Breaking of the $SU(3) \times SU(3)$ symmetry in hadronic physics (E. Amaldi Festschrift, to appear.) These two papers contain other references.
2. This is not the case for $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$. The combination $(u_0 - \sqrt{2}\, u_8)$ denoted by y in (1) is a nilpotent.
3. M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **125** (1962), 1067.
4. M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968), 2195.
5. S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968), 224.
6. Much more generally one may consider w_0 to be a linear combination of $SU(3)$ scalars belonging to different $(n, \bar{n}) \oplus (\bar{n}, n)$ type of representations. In this article we study the simplest possible generalizations of this type, and in particular compare respective effects of introducing $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$.
7. Such a generalization is complementary to the one, often suggested, obtained on introducing a $(1, 8) \oplus (8, 1)$ term, since this latter representation contains no $SU(3)$ scalar.
8. Chiral symmetry breaking terms belonging to $(8, 8)$ and even $(6, \bar{6}) \ominus (\bar{6}, 6)$ have been proposed by many authors from different points of view, e.g., K. L. Barnes and C. J. Isham, *Nucl. Phys. B* 17 (1970), 267; C. J. Isham, A. Salam, and J. Strathdee, IC/70/17 (Trieste); H. Genz and J. Katz, *Nucl. Phys. B* **21** (1970), 333; T. K. Kuo, *Phys. Rev. D* **2** (1970), 342 and 2439; A. M. Harun-Ar Rashid and M. A. Rashid, IC/70/91 (Trieste). These proposals include terms other than $SU(3)$ scalars belonging to $(6, \bar{6})$ and $(8, 8)$. In particular it has been noted since by several authors that noninvariance of form under the Kuo transformation involves no real paradox. Different possible candidates for symmetry breaking subject to certain restrictions have been examined by B. Renner and A. Sudbery, *Nucl. Phys. B* **13** (1969), 27. Possible contributions from $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$ representation have also been studied from a different point of view by N. Papastamatiou, H. Umezawa and D. Welling, UWM-4867-70-11 (Wisconsin).
9. Compare the remarks concerning this point (and applicable to the case with $SU(3)$ symmetric vacuum) by R. Dashen, Some basic facts about chiral symmetry breaking, Princeton Preprint, 1970.
10. M. Gell-Mann, University of Hawaii Summer School Lectures, 1969.
11. P. Carruthers, *Phys. Rev. D* **2** (1970), 2265. Cornell Preprint, CLNS-128, 1970.
12. S. P. de Alwis and P. J. O'Donnel, *Phys. Rev. D* **2** (1970), 1023.
13. S. P. de Alwis, DAMTP 70/40, Cambridge Preprint.
14. J. Ellis, TH. 1250-CERN.

15. J. Ellis, P. H. Weisz and B. Zumino, TH. 1253-CERN.
16. J. Ellis, TH. 1289-CERN, Coral Gables Conference Lecture, 1971.
17. H. Kleinert and P. H. Weisz, TH. 1236-CERN.
18. R. J. Crewther, *Phys. Lett. B* 33 (1970), 305.
19. R. Jackiw, MIT Preprints CTP 154, 156.
20. As an example of other types of solutions of (2.2) we may note that corresponding to (A32) we have an idempotent of $(6, \bar{6})$ with $0^+(3) \times 0^-(3)$ as little group. This type of idempotent does not exists for $(3, \bar{3})$ or $(8, 8)$. We will not list systematically all possible solutions of (2.2) which is however quite easy to do.
21. J. J. de Swart, *Rev. Modern Phys.* 35 (1963), 916. P. McNamee and F. Chilton, *Rev. Modern Phys.* 36 (1964), 1005. This convention implies positive matrix elements for the generators A_1^3 A_3^1 (or $F_4 \pm iF_5$). A more canonical choice, adapted to $SU(n)$ would be to ensure positive matrix elements for A_2^3, A_3^2. For $SU(3)$ we have chosen the former convention used by Gell-Mann.
22. Using for example the matrix elements of the generators of $SU(3)$ acting on 6 and $\bar{6}$, along with the phase convention [21].
23. Our phase conventions are consistent with those used in [4] for $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$. It should not be forgotten, of course, that for $(6, \bar{6}) \oplus (\bar{6}, 6)$ we have to add to the w's of (2.10) their hermitic conjugates. This will always be implied. Since in this paper we never consider a more general model involving mixture of $(6, 6) \oplus (\bar{6}, 6)$ and $(8, 8)$, there is no risk of confusion in using the same notations (w) for both the cases.
24. See, for example, the relevant remarks in Reference 9. Our conventions are however somewhat different.
25. Using pole dominance hypotheses and ignoring η, η' mixture one obtains $\Delta_K = f_K^2 m_K^2$, $\Delta_\eta = f_\eta^2 m_\eta^2$. Generally it is accepted that $f_K^2/f_\pi^2 \simeq 5/4$ and f_η/f_π though uncertain may be assumed similarly to be the order of 1. We suppose in (3.10) all the necessary corrections have been absorbed in the parameters ξ_K, ξ_η. One may reasonably expect them to be of the order of unity, even when one leaves a considerable margin for uncertainties involved.
26. This result utilized in Ref. 10–19 utilizes the energy momentum tensor introduced by C. G. Callan, S. Coleman and R. Jackiw, *Ann. Physics* 59 (1970), 42. In this case $\theta(x)$ is the divergence of the dilatation current (our Eq. (3.21)). See also equation (III.8) of G. Mack and A. Salam, *Ann. Physics* 53 (1969), 174.
27. See Reference 26.
28. Our solutions in Appendix C are however given for general values of x.
29. R. Brandt and G. Preparata, *Ann. Physics* 61 (1970), 119. G. Preparata, Maryland Preprint 71-018.
30. It should not be forgotten however that the value $c = -\sqrt{2}$, does not in general correspond to a weak breaking of $SU(2) \times SU(2)$, due to the presence of w_0. The role of the strong constraint (3.20) is particularly important in such considerations, since we cannot take w_0 to be arbitrarily small. On the other hand, the strength of the $SU(3)$ breaking depends directly on c.
31. The possibility of an intermediate type of breaking has recently been noted by T. P. Cheng and R. Dashen, Princeton Preprint, 1971.
32. The role of possible scalar meson contributions in this context has been emphasized by Ellis [14].
33. R. Dashen and M. Weinstein, *Phys. Rev.* 183 (1969), 1261.
34. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* 17 (1966), 616.
35. J. C. Le Guillou, A. Morel and H. Navelet, TH 1260-CERN.
36. A. Astier, Rapporteur's talk on boson resonances, Kiev conf., 1970.

Printed in Belgium by the St. Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges

Reprinted from ANNALS OF PHYSICS
Vol. 76, No. 1, March 1973
Printed in Belgium
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London

On Chiral Symmetry Breaking. II

C. DARZENS*

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes, 75 Paris V, France

Received March 29, 1972

We study the restrictions imposed on chiral symmetry breaking terms by a set of postulates, whose main content is furnished by certain ideas of Michel and Radicati. We then test certain particular cases by utilizing an effective Lagrangian and calculating meson–meson scattering lengths. A convenient technique for calculating traces of matrices which appear in our model is presented in an appendix.

1. INTRODUCTION

The strong breaking of hadronic internal symmetry is described in a natural fashion, as shown by Weinberg [1], by giving the tensorial structure of the symmetry breaking terms of the Lagrangian under the chiral group. In the $SU3^+ \times SU3^-$ framework, the $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ model of Gell-Mann, Oakes and Renner [2] is the simplest possible choice, the weak mass of the pion reflecting the proximity of $SU2^+ \times SU2^-$ invariance. Meanwhile, there are at present no clear tests of this model, and, moreover, the controversy on the sigma term in the pion-nucleon scattering leaves some room for near $SU3$ invariance rather than $SU2^+ \times SU2^-$ invariance.

In this context, it seems interesting to investigate other possibilities, but if one wants to have a theory with a certain predictive power, one can choose either one term belonging to a representation other than $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$, (in this case (8, 8) is the most commonly proposed [3, 4]), or a mixture of several representations, adding a criterion in order to reduce the number of arbitrary parameters.

In this paper we continue the study, started in a preceding work [5], of the chiral symmetry breaking terms from the point of view of Michel and Radicati [6]. Indeed, they have shown that the directions of the leptonic and electromagnetic interactions in $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$ can be characterized by the notion of idempotent or nilpotent of an algebra defined on the $(1, 8) + (8, 1)$ representation, or in a related manner by the notion of critical orbits they generate. They

* Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S.

Copyright © 1973 by Academic Press, Inc.
All rights of reproduction in any form reserved.

have also remarked that the chiral breaking chosen in the $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ model happens to be near such a critical and nilpotent direction. In this work, we investigate the possibility that the symmetry breaking part $\mathscr{L}_B$ of the Lagrangian is in fact made up from a sum of idempotents or nilpotents which belong to critical orbits.

In the second section, after a brief résumé of the Michel and Radicati's ideas, we establish the most general form of $\mathscr{L}_B$ which satisfies this hypothesis plus the other usual restrictions on $\mathscr{L}_B$. The required conditions are found to be quite restrictive, and the possible representations are of $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ type.

In the third section, we investigate a model with two of the terms previously obtained, and choose $\mathscr{L}_B$ of the form:

$$\alpha(u_0 - \sqrt{2}\, u_8) + \beta w(n), \tag{1.1}$$

with $u_0 - \sqrt{2}\, u_8$ invariant under $SU2^+ \times SU2^-$ extracted from $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ and $w(n)$ a $(SU3)^d$ invariant extracted from $(n, n) + (\bar{n}, n)$. In choosing such a form we adopt a somewhat different point of view from the one of our previous paper [5]. Instead of introducing constraints following from the notion of broken scale invariance, which put certain restrictions on the value of c in the form $\alpha(u_0 - cu_8) + \beta w(n)$, we choose directly the value $c = \sqrt{2}$, in order to exploit more fully the relation of the symmetry breaking terms with the ideas of Michel and Radicati.

We test this model with an effective Lagrangian: the masses of the pseudoscalar mesons fix the parameters α and β, and we are able to calculate the scattering lengths of meson–meson scattering for arbitrary values of n. The result is expressed in function of the eigenvalues of the $SU3$ Casimir operators for the representation n chosen. This technique being of more general interest, we explain it in the appendix, adding an application to the calculation of the scattering lengths in the pure $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ case.

2. Determination of the Critical and Idempotent Vectors

We begin by a brief summary of the work of Michel and Radicati, referring to [6] for precisions and mathematical rigor of the statements.

At first we recall that, given a group that acts on a manifold, the manifold is partitionned into strata and orbits; the set of all transforms of a point is an orbit, and the set of orbits whose little groups are conjugated is called a stratum. For a real manifold, an orbit which is isolated in its stratum has the following interesting property: Under very general conditions, every real function (sufficiently regular) defined on the manifold and invariant under the group action is extremal on it.

Such an orbit is said to be critical; the inverse property is true: Every critical orbit is isolated in its stratum.

We are interested here on the $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$ group, acting on the unit sphere of the vector space of a real representation, irreducible as a real one. Consequently if one imagines that a "Lagrangian" L, invariant under $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$ is defined on this space, the vectors belonging to the critical orbits will appear as solutions of $dL = 0$ (to be sure, in a particular case, other solutions of dynamical origin are possible; see [7] for such an example).

Another important notion is that of idempotent or nilpotent: Given a representation $\mathscr{E}$ of $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$, if one can extract $\mathscr{E}$ from $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$, then the decomposition of $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$ into its symmetrical and antisymmetrical components defines, if it exists, a symmetrical algebra $\vee$, invariant under the group:

$$\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \xrightarrow{\vee} \mathscr{E}. \tag{2.1}$$

We note this law:

$$x \vee y = z \qquad x, y, z \in \mathscr{E}. \tag{2.2}$$

(This algebra is not necessarily unique.)

The idempotents are then defined by the equation

$$x \vee x = \lambda x. \tag{2.3}$$

The nilpotent case corresponds to $\lambda = 0$, but from now on we shall consider the nilpotents as a special case of the idempotents.

Such algebras play an important part in the bootstrap theories which thus favour idempotents.

We note that the representations we shall be interested in are of the form $(n, m) \oplus (\bar{n}, \bar{m}) \oplus (m, n) \oplus (\bar{m}, \bar{n})$; from $n \times n$ and $m \times m$ one can always extract $\bar{n}$ and $\bar{m}$ which are either symmetrical or antisymmetrical. Consequently if $\bar{m}$ and $\bar{n}$ are of the same symmetry, we can always define a symmetrical algebra $\vee$. In the cases we shall obtain, the algebra will be unique.

The notion of critical orbit is not independent of that of idempotent, as is easily seen in the case of a critical orbit which is unique in its stratum: When the little group $G(x)$ of a vector x belonging to that orbit uniquely characterizes it [8], $x \vee x$ is invariant under $G(x)$ and thus can be only λx or 0 (in this case, $G(x)$ is easily proved to be maximal in the set of all little groups of the representation).

The directions of the leptonic and electromagnetic interactions in $(1, 8) \oplus (8, 1)$ give examples of critical orbits and idempotents.

In view of such notions, we postulate that the part $\mathscr{L}_B$ which breaks $SU3^+ \times SU3^-$ of the Lagrangian is a sum of terms whose tensorial properties under $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$ are thus specified:

They are images of vectors extracted from irreducible representations of that group which possess the following four properties:

(a) They are sum of a scalar and the eighth component of an octet under $(SU3)^d$, in order to preserve the Gell-Mann–Okubo mass formula. $U(2)^d$ is then in their little group.

(b) They are invariant by C, P, CP, which impose that they are of the form $(m, n) + (\bar{m}, \bar{n}) + (n, m) + (\bar{n}, \bar{m})$, [9].

(c) They generate a critical orbit.

(d) They are idempotents of a symmetrical algebra $\vee$.

The possible subgroups of $SU3^+ \times SU3^- \times (1, C, P, CP)$ containing $U(2)^d \times (1, C, P, CP)$ are up to a discrete operation:

$$(SU3)^d, \quad U(2)^+ \times U(2)^-, \quad SU2^+ \times SU2^- \times U(1), \quad U(2)^d \times U(1), \quad U(2)^d. \tag{2.4}$$

They are the possible little groups of our vectors and we discuss them case by case.

$(SU3)^d$

The $(SU3)^d$ invariant vectors can be extracted only from $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ representations (of course, this is to be read (n, n) for a real representation). A preceding remark shows that we can always define a symmetrical algebra $\vee$, which is in fact unique. The $(n, \bar{n})$ representation can be conveniently handled in the form of a $n \times n$ matrix M on which $SU3^+ \times SU3^-$ acts by

$$M \to U(u_+)\, MU^+(u_-), \qquad u_+ \in SU3^+, \qquad u_- \in SU3^-, \tag{2.5}$$

u being represented by $U(u)$ in the $\mathscr{E}_n$ vector space. The $2n^2$ real components $M + M^+$ and $i(M - M^+)$, even and odd by parity, give a representation $(n, \bar{n}) \oplus (\bar{n}, n)$ of $SU3^+ \times SU3^-$ which is irreducible as a real representation. The hermitian scalar product is

$$(1/2n)\, \mathrm{Tr}(M_1{}^+ M_2 + M_2{}^+ M_1), \tag{2.6}$$

the condition of $(SU3)^d$ invariance

$$U(u)\, MU^+(u) = M \tag{2.7}$$

gives the only solutions

$$M = \lambda \mathbb{1}. \tag{2.8}$$

The only vectors of unit norm and with little group $(SU3)^d \times (1, C, P, CP)$ are $\pm\mathbb{1}$. They generate two orbits, which are therefore isolated in their stratum. $\mathbb{1} \vee \mathbb{1}$ being invariant by $(SU3)^d$ can be only $\lambda\mathbb{1}$, which shows that $\mathbb{1}$ is idempotent (we recall that we do not distinguish the cases $\lambda \neq 0$ and $\lambda = 0$).

$SU2^+ \times SU2^- \times U(1)$ and $U(2)^+ \times U(2)^-$

Renner and Sudbery [10] have shown that the only invariant vectors under these groups and satisfying conditions *a* and *b*, belong to the $(1, 8) \oplus (8, 1)$ or $(3, \bar{3}) \oplus (\bar{3}, 3)$ representations. One have $U(2)^+ \times U(2)^-$ in the first case and $SU2^+ \times SU2^- \times U(1)$ in the second case. In the two cases we obtain critical and idempotent vectors [6].

$U(2)^d$ and $U(2)^d \times U(1)$

These cases are a little more complicated and are worked out with the two following propositions:

(α) If we can extract the 8 representation from $n \times m$ (m and $n \neq 1$), then we can equally extract the 27 representation except in the cases 3×6, $\bar{3} \times \bar{6}$, $3 \times \bar{3}$, $\bar{3} \times 3$.

(β) If we can extract the 8 and 27 representations from $m \times n$, then the orbits generated by the $U(2)^d$ or $U(2)^d \times U(1)$ invariant vectors of unit norm cannot be isolated.

For proving the first proposition, one can show, for example by using Young diagrams or weight diagrams, that whenever one can extract $\bar{n}$ form $m \times 8$, one can equally extract $\bar{n}$ from $m \times 27$, except in the cases $3 \times 6, \bar{3} \times \bar{6}, 3 \times \bar{3}, \bar{3} \times 3$. Then a well-known theorem leads to the proposition [11].

For proving the second proposition, one notes that the $U(2)^d$ or $U(2)^d \times U(1)$ invariant vectors are sum of independent vectors X_i with well defined Y^+ and Y^-, and consequently $Y^5 = Y^+ - Y^-$. In our case we have at least two vectors X_i. These vectors X_i cannot be on the same orbit because they could be obtained one from another only by a $\exp i\varphi Y^5$ transformation (which commutes with $U(2)^d$) [8], and they are at most multiplied by a phase in a such a transformation.

Thus there exists a continuous set of orbits generated by $\sum_i \alpha_i X_i$ (conveniently normalized), and the $U(2)^d$ or $U(2)^d \times U(1)$ orbits cannot be isolated, which proves β.

From the two propositions it follows directly that we cannot have a critical vector satisfying condition *a*, except in the (3, 6) and $(3, \bar{3})$ cases; but in the $(3, \bar{3})$ case, there is another $U(2)^d$ invariant vector which is the $(SU3)^d$ scalar we can extract from $3 \times \bar{3}$ and the same reasoning shows that there is a continuous set of orbits generated by the $U(2)^d$ invariant vectors.

We are left only with $(3, 6) + (6, 3) + (\bar{3}, \bar{6}) + (\bar{6}, \bar{3})$ which gives a vector satisfying conditions *a*, *b*, *c* with $U(2)^d$ little group, but which fails to satisfy the *d* condition, as we cannot define a symmetrical algebra v in that case. Indeed the $\bar{3}$ extracted from 3×3 is antisymmetrical whereas the $\bar{6}$ from 6×6 is symmetrical.

In any case this vector is worthy of attention, the notion of critical orbit being already a very physical idea. We note that this representation has already been mentionned by Renner and Sudbery [10] for the transformation property of the $U(2)^d$ invariant vector under $SU2^+ \times SU2^-$, and in a different context by Harari [12].

The preceding possibilities of representations having vectors satisfying conditions a, b, c or a, b, c, d are summarized in Table I; of course, we must add to the indicated little groups the discrete operations C, P, CP.

TABLE I

Possible representations satisfying conditions a, b, c, d

Little group	Representations conditions a, b, c	Representations conditions a, b, c, d	Notation of the vectors
$(SU3)^d$	$(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$	$(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$	$w(n)$
$U(2)^+ \times U(2)^-$	$(1, 8) + (8, 1)$	$(1, 8) + (8, 1)$	
$SU2^+ \times SU2^- \times U(1)$	$(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$	$(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$	
$U(2)^d \times U(1)$			$u_0 - \sqrt{2}\, u_8$
$U(2)^d$	$(3, 6) + (6, 3) + (\bar{3}, \bar{6}) + (\bar{6}, \bar{3})$		

In order to make some calculations in the following section, we make now a choice for $\mathscr{L}_B$. We conjecture that there are two such terms which are preponderant in the Lagrangian. Observing that the $(1, 8) + (8, 1)$ term gives a mass only to the kaons, $u_0 - \sqrt{2}\, u_8$ gives a mass to the K and η, whereas $w(n)$ gives the same mass to the eight mesons, we see that $(1, 8) + (8, 1)$ cannot be retained: Utilized with $u_0 - \sqrt{2}\, u_8$, it would give $m_\pi = 0$, and with $w(n)$, $m_\pi = m_\eta$; it can be taken only as a correction term and we do not consider it. Therefore, we are naturally led to a competition between $SU2^+ \times SU2^-$ invariance with $u_0 - \sqrt{2}\, u_8$ and $(SU3)^d$ invariance with $w(n)$, and we finally choose:

$$\alpha(u_0 - \sqrt{2}\, u_8) + \beta w(n). \tag{2.9}$$

3. Meson–Meson Scattering Lengths

3.1. *Generalities*

We test now the preceding assumptions with an effective Lagrangian. We use a non linear realization of $SU3^+ \times SU3^-$ discussed by Cronin [13] following a work of Gürsey [14], that we extend in order to obtain the $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ representations [15, 20].

Given a linear representation of $SU3$ on C^n, the Lie Algebra is represented by $n \times n$ hermitian traceless matrices $L(\lambda_i)$ with

$$[L(\lambda_i), L(\lambda_j)] = 2if_{ijk}L(\lambda_k). \tag{3.1}$$

For our calculation we choose in fact $g_i = L(\lambda_i/2)$, normalized by

$$[g_i, g_j] = if_{ijk}g_k\,; \qquad \operatorname{Tr} g_i g_j = \alpha\delta_{ij}\,. \tag{3.2}$$

The elements u of $SU3$ are represented by unimodular unitary matrices $U(u)$.

The nonlinear representation of $SU3^+ \times SU3^-$ we use is defined by the n-independent transformation law ($u_+ \in SU3^+$, $u_- \in SU3^-$):

$$\omega = \exp 2i(g_iM_i/\chi) \to U(u_+)\ \omega U^+(u_-) = \exp 2i(g_jM_j'/\chi). \tag{3.3}$$

The M_i are transformed linearly under $(SU3)^d$ according to a 8 representation, and nonlinearly under the remainder of the group. The n^2 components of ω are transformed according to the $(n, \bar{n})$ representation, and $\omega + \omega^+$ gives the even parity part of the $(n, \bar{n}) \oplus (\bar{n}, n)$ multiplet. The M_i are interpreted as the pseudoscalar mesons octet.

The invariant part under $SU3^+ \times SU3^-$ of the Lagrangian is:

$$\mathscr{L}_0 = (\chi^2/8\alpha) \operatorname{Tr} \partial_\mu \exp i(2g \cdot M/\chi)\, \partial^\mu \exp - i(2g \cdot M/\chi), \tag{3.4}$$

The coefficient $\chi^2/8\alpha$ being chosen so that we have in the second order expansion in $1/\chi$:

$$\mathscr{L}_0 = \tfrac{1}{2}\, \partial_\mu M_i\, \partial^\mu M_i\,. \tag{3.5}$$

The symmetry breaking part is (for the 3-representation $g_i = \lambda_i/2$)

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_B &= \alpha(u_0 - \sqrt{2}\, u_8) + \beta w(n) \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}}\, \alpha \operatorname{Tr} \left(\exp i\frac{\lambda M}{\chi} + \exp - \frac{i\lambda M}{\chi}\right)(\lambda_0 - \sqrt{2}\, \lambda_8) \\ &\quad + \beta \operatorname{Tr} \left(\exp 2i\frac{gM}{\chi} + \exp - 2i\frac{gM}{\chi}\right).\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.2. *Masses of the mesons*

The second order expansion in $1/\chi$ gives

$$\mathscr{L}_B = -\{2\alpha(\delta_{ij} - \sqrt{3}\, d_{8ij}) + 4\beta \operatorname{Tr} g_i g_j\}(M_iM_j/\chi^2) \tag{3.7}$$

which gives for the masses

$$m_i^2 = [4\alpha(1 - \sqrt{3}\, d_{8ii}) + 8\beta \operatorname{Tr} g_i^2]/\chi^2. \tag{3.8}$$

Inserting the symmetrized Casimir operators $I_2'(n)$ (see appendix), we obtain

$$\mathrm{Tr}\, g_i^2 = (n/6)\, I_2'(n), \tag{3.9}$$

$$m_\pi^2 = (4n/3\chi^2)\, \beta I_2'(n), \tag{3.10}$$

$$m_k^2 = (6\alpha/\chi^2) + m_\pi^2, \tag{3.11}$$

which determine α and β.

The calculation of $\partial_\mu A_i^\mu$ to the first order in $1/\chi$ gives

$$\partial_\mu A_i^\mu = -i[Q_i^5, \mathscr{L}_B] = \chi m_i^2 M_i\,; \tag{3.12}$$

therefore we identify χ with $F_\pi = F_K$.

We add a word of caution: We have normalized Q_i^5 by

$$[Q_i^5, Q_j^5] = i f_{ijk} Q_k\,, \tag{3.13}$$

and not by

$$[Q_i^5, Q_j^5] = 2i f_{ijk} Q_K\,. \tag{3.14}$$

Therefore, our F_π is half the value utilized by Weinberg [16] for example.

3.3. *Meson–meson scattering*

The fourth order expansion in $1/\chi$ of $\mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_B$ gives the meson–meson interaction. The part which comes from $\mathscr{L}_0$ is

$$\mathscr{L}_0^{(4)} = -\frac{2}{3F_\pi^2} f_{ijm} f_{klm} M_i \partial_\mu M_j M_k \partial_\mu M_l\,. \tag{3.15}$$

And the part from $\mathscr{L}_B$:

$$\mathscr{L}_B^{(4)} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{\alpha}{12F_\pi^4} \{\mathrm{Tr}(\lambda_0 - \sqrt{2}\,\lambda_8)(\lambda M)^4\} + \frac{4\beta}{3F_\pi^4}\, \mathrm{Tr}(gM)^4. \tag{3.16}$$

Inserting the symmetrized Casimir operators $I_4'(n)$ of the appendix, and utilizing

$$\mathrm{Tr}\, \lambda_0(\lambda M)^4 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\, M^2 M^2, \tag{3.17}$$

$$\mathrm{Tr}\, \lambda_8(\lambda M)^4 = 2M^2 d_{8ij} M_i M_j + \frac{4}{3}\, M_8 d_{ijk} M_i M_j M_k\,, \tag{3.18}$$

$$\mathrm{Tr}(gM)^4 = \frac{n}{24}\, I_4'(n)\, M^2 \cdot M^2, \tag{3.19}$$

we obtain

$$\mathscr{L}_B^{(4)} = (1/6F_\pi^4)(\alpha + (n\beta/3)\, I_4'(n))\, M^2 \cdot M^2 - (\sqrt{3}\,\alpha/6F_\pi^4)\, M^2 d_{8ij} M_i M_j \quad (3.20)$$

(we omit the η interactions).

We are now able to calculate the meson–meson scattering amplitudes and scattering lengths in a straightforward way, and we list the results.

π–π interaction

$$\pi_a + \pi_b \to \pi_c + \pi_d$$

$$L^{\pi\pi} = \frac{1}{6F_\pi^2}\left\{(\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\pi})^2 - (\partial_\mu \boldsymbol{\pi})^2\,(\boldsymbol{\pi})^2 + \frac{1}{4} m_\pi^2 \frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\, \boldsymbol{\pi}^2 \cdot \boldsymbol{\pi}^2\right\}, \quad (3.21)$$

$$T^{\pi\pi}_{cd,ab} = \frac{1}{F_\pi^2}\left\{s\delta_{ab}\delta_{cd} + t\delta_{ac}\delta_{bd} + u\delta_{ad}\delta_{bc} + \frac{1}{3}(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})\left(m_\pi^2 \frac{I_4'(n)}{I_2'(n)} - \sum_i q_i^2\right)\right\}, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{m_\pi^2}{6\pi F_\pi^2}\left(1 + \frac{5}{16}\frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\right) m_\pi^{-1}, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= \frac{m_\pi^2}{12\pi F_\pi^2}\left(-1 + \frac{1}{4}\frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\right) m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

K–K interaction

$$K_\alpha + K_\beta \to K_\gamma + K_\delta$$

$$L^{KK} = \frac{1}{6F_\pi^2}\left\{(\partial_\mu \bar{K} \cdot K)^2 + (\partial_\mu K \cdot \bar{K})^2 - (\bar{K}\partial_\mu K)(K\partial_\mu \bar{K}) - (\bar{K}K)(\partial_\mu \bar{K}\partial_\mu K) + \left(m_K^2 - m_\pi^2 + \frac{I_4'(n)}{I_2'(n)} m_\pi^2\right)(\bar{K} \cdot K)^2\right\} \quad (3.24)$$

$$T^{KK}_{\gamma\delta,\alpha\beta} = \frac{1}{6F_\pi^2}\left\{-3s + \sum_i q_i^2 + 2m_K^2 + 2m_\pi^2\left(1 - \frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\right)\right\}(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}), \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= \frac{1}{48\pi F_\pi^2}\frac{m_\pi}{m_K}\left\{m_\pi^2\left(\frac{I_4'(n)}{I_2'(n)} - 1\right) - 3m_K^2\right\} m_\pi^{-1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

π–K interaction

$$\pi_a(q) + K_\alpha(k) \to \pi_b(q') + K_\beta(k'),$$

$$L^{\pi K} = \frac{1}{12F_\pi^2}\left(m_K^2 - m_\pi^2 + 2\,\frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\,m_\pi^2\right)\pi^2 \cdot \bar{K}K, \tag{3.27}$$

$$T^{\pi K}_{b\beta,a\alpha} = \frac{1}{12F_\pi^2}\left\{3t - (q^2 + k^2 + q'^2 + k'^2) + 2m_K^2 - 2m_\pi^2 + 4\,\frac{I_4'(n)}{I_2'(n)}\,m_\pi^2\right\}\delta_{ab}\delta_{\alpha\beta}$$

$$+ \frac{i}{4F_\pi^2}(s - u)\,\epsilon_{bac}(\tau_c)_{\beta\alpha}\,, \tag{3.28}$$

$$a_{1/2} = \frac{m_\pi^2}{24\pi F_\pi^2}\,\frac{-\left(\dfrac{I_4'(n)}{I_2'(n)} - 1\right)m_\pi + 6m_K}{m_\pi + m_K}\,m_\pi^{-1},$$

$$a_{3/2} = \frac{m_\pi^2}{24\pi F_\pi^2}\,\frac{2\left(\dfrac{I_4'(n)}{I_2'(n)} - 1\right)m_\pi - 3m_K}{m_\pi + m_K}\,m_\pi^{-1}. \tag{3.29}$$

$I_4'(n)/I_2'(n)$ is easily calculated, using Ref. [17], and we obtain in particular the pion–pion scattering lengths listed in Table II for different values of n. For this calculation, we use $m_\pi/2\pi F_\pi^2 = 0{,}44m_\pi^{-1}$ (recall our definition of F_π). For $n = 3$, we reobtained the Weinberg's values, but this case is evidently not in the spirit of this work as we must take one and only one idempotent for each representation.

TABLE II

Scattering lengths for several choices of n^a

n	3	6	8	10	27
a_0	0,2	0,3	0,28	0,6	0,56
a_2	−0,06	−0,011	−0,018	0,1	0,09

[a] The case $n = 3$ is given for comparison, but excluded from our work.

4. Conclusion

We have investigated the chiral symmetry breaking part of the Lagrangian in the framework of hypotheses *a–d* and we have seen that they impose a choice only among $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ representations. Especially, with only two terms we are led to a scheme which keeps the essential feature of the $(3, \bar{3}) + (\bar{3}, 3)$ model of competition between $(SU3)^d$ and $SU2^+ \times SU2^-$ invariance, the weak mass of the

pion here again indicating nearness of $SU2^+ \times SU2^-$ invariance. Therefore this theory is also sensible to the value of the σ-term in the same manner.

For large values of n, the pion–pion scattering lengths would vary roughly as $n^{2/3}$, and such n are therefore excluded. But for the first values of n, and in particular for $n = 8$ which in the pure case obtains more favor among the physicists, the results are near to the Weinberg's values and we cannot expect that experiments will decide in the near future.

Appendix

We realize the octet space (or the $SU3$ Lie algebra) as the set of 3×3 hermitian traceless matrices x. They are represented on the (p, q) representation space of $SU3$ by $n \times n$ matrices $L(x)$.

We show in this appendix, following a technique of Michel [18], that we can easily calculate expressions like

$$\frac{1}{p!} \sum_P P \operatorname{Tr} L(x_{i_1}) L(x_{i_2}) \cdots L(x_{i_p}), \tag{A1}$$

the sum being extended to all permutations P of $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, in the cases $p = 2, 3, 4, 5, 7$; the other cases are more difficult to handle, and we do not treat them here. Such expressions include totally symmetrical terms like

$$\operatorname{Tr}[L(x)]^p, \qquad \operatorname{Tr} L(x)[L(y)]^{p-1}. \tag{A2}$$

We first deal with the case $p = 4$.

We recall [6] that on the octet are defined:

a scalar product	$(x, y) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} xy$	(A3)
the $SU3$ Lie algebra	$x \wedge y = -(i/2)[x, y]$	(A4)
a symmetrical algebra	$x \vee y = \frac{1}{2}(xy + yx) - \frac{2}{3}(x, y).$	(A5)

From $8 \otimes 8 \otimes 8 \otimes 8$ we can extract 8 invariants, each having a definite symmetry under permutations; but there is only one totally symmetrical invariant: indeed we must form the invariants utilizing the symbols $\vee$ and $\wedge$, and the scalar product [18]; $\wedge$ is antisymmetrical and excluded for the totally symmetrical invariants. There are two possibilities (x_i belongs the i octet):

$$\sum_P P(x_1, x_2)(x_3, x_4) \tag{A6}$$

and

$$\sum_P P(x_1 \vee x_2, x_3 \vee x_4). \tag{A7}$$

But we know an identity [19]:

$$(x \vee y, z \vee t) + (x \vee z, y \vee t) + (x \vee t, y \vee z) = \tfrac{1}{3}\{(x, y)(z, t) + (x, z)(y, t) + (x, t)(y, z)\}, \tag{A8}$$

which gives

$$\sum_P P(x_1, x_2)(x_3, x_4) = 3 \sum_P P(x \vee y, z \vee t). \tag{A9}$$

Therefore (A6) and (A7) are proportionnal and give only one totally symmetrical invariant.

We conclude that (A1) for $p = 4$ and $1/4! \sum_P P \operatorname{Tr} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}$, which are both totally symmetrical, are proportionnal:

$$\frac{1}{4!} \sum_P P \operatorname{Tr} L(x_{i_1}) L(x_{i_2}) L(x_{i_3}) L(x_{i_4}) = k \frac{1}{4!} \sum_P P \operatorname{Tr} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}. \tag{A10}$$

For determining k, we use the Casimir operators C_p and I_p, which have been calculated by Perelomov and Popov [17], defined by

$$C_p = \sum A^{i_1}_{i_2} A^{i_2}_{i_3} \cdots A^{i_p}_{i_1}, \tag{A11}$$

$$I_p = \frac{1}{p!} \sum_P P(A^{i_1}_{i_2} A^{i_2}_{i_3} \cdots A^{i_p}_{i_1}). \tag{A12}$$

A^j_i are the generators of $SU3$. The value of I_p for the representation (p, q) of dimension n is noted $I_p(n)$. Taking the trace of $I_4(n)$ and utilizing (A10), we obtain at once,

$$nI_4(n) = k3I_4(3),$$

or

$$k = (n/3)(I_4(n)/I_4(3)). \tag{A13}$$

We shall note

$$I_4(n)/I_4(3) \equiv I_4'(n). \tag{A14}$$

Finally we obtain the result

$$\frac{1}{4!} \sum_P P \operatorname{Tr} L(x_{i_1}) L(x_{i_2}) L(x_{i_3}) L(x_{i_4}) = \frac{n}{3} I_4'(n) \frac{1}{4!} \sum_P P \operatorname{Tr} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} \tag{A15}$$

the r.h.s. is easily seen to be $\frac{1}{2}(1/4!) \sum_P P \operatorname{Tr} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}$. In our work, due to the normalization of the g_i matrices we must divide the right hand side by 2^4. This gives, for example,

$$\operatorname{Tr}(g_i M_i)^4 = (n/48) \operatorname{Tr}(\lambda_i M_i)^4 \times I_4'(n) = (n/24) I_4'(n) M^2 \cdot M^2. \tag{A16}$$

The same reasoning is possible whenever there is only one totally symmetrical invariant extracted from the tensorial product of p-octets.

We can obtain these cases with the following result:

$$\text{dividing } p \text{ by 6 gives } p = 6q + r;$$

then the number of totally symmetrical invariant is

$$N(p) = q + 1 - \delta_{1r}\,. \tag{A17}$$

For $N(p) = 1$, this gives

$$p = 2, 3, 4, 5, 7. \tag{A18}$$

We sketch the demonstration which lies on the two following remarks:

1. A totally symmetrical invariant can be formed only utilizing the scalar product and $\vee$, giving a scalar symmetrized by the Young symmetrizer $\sum_P P$. For excluding $\wedge$, we use its property of being a derivation and various identities on the $\vee$ and $\wedge$ symbols [19].

2. Using (A9), one shows that such invariants can be put on the form (we note $(x, y \vee z) \equiv (x, y, z)$ which is totally symmetrical in x, y, z):

$$\sum_P \underbrace{P(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots (x_{i_r}, x_{i_{r+1}})}_{r}\ \underbrace{(x_{i_{r+1}}, x_{i_{r+2}}, x_{i_{r+3}}) \cdots (x_{r+s}, x_{r+s+1}, x_{r+s+2})}_{s} \tag{A19}$$

with $2r + 2s = p$.

Then (A17) is just the number of solutions (r, s) of (A19). In the five cases (A18), we obtain

$$\frac{1}{p!} \sum_P P \operatorname{Tr} L(x_{i_1}) \cdots L(x_{i_p}) = \frac{n}{3} I_p'(n) \frac{1}{p!} \sum_P P \operatorname{Tr} x_{i_1} \cdots x_{i_p}\,.$$

We finally quote the values of I_p' utilized in our work:

$$\begin{aligned}
&\text{For } (p, q) = (p, 0), && I_4' = (1/20)\, p(p + 3)(2p^2 + 6p - 3),\\
&\text{For } (p, q) = (p, p), && I_4' = (9/20)\, p(p + 2)(2p^2 + 4p - 1),\\
&\text{For } (p, q), && I_2' = \tfrac{1}{4}(p^2 + pq + q^2 + 3p + 3q).
\end{aligned} \tag{A20}$$

We add now an application to the calculation of π–π scattering lengths when the symmetry breaking terms correspond to the scalar and the eighth component of an octet extracted from the same $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$ representation. In this case, with

$$\omega = \exp 2i(g_i M_i/\chi), \tag{A21}$$

we take for the symmetry breaking part $\mathscr{L}_B$:

$$\mathscr{L}_B = \mathscr{E}_0 \operatorname{Tr}(\omega + \omega^+) + 2\sqrt{3}\,\mathscr{E}_8 \operatorname{Tr} g_8(\omega + \omega^+). \tag{A22}$$

However, this choice implies that the representation is not real, since in that case $\operatorname{Tr} g_8(\omega + \tilde{\omega})$ corresponds to the extraction of the antisymmetrical octet from $n \times n$ and gives identically zero. For a real representation the octet piece is $d_{ijk} \operatorname{Tr} g_i g_i(\omega + \tilde{\omega})$ and we exclude this case here. (The calculation for $n = 8$ is made in Ref. [20]).

The same calculation as in Section 2 gives then

$$H^{\pi\pi} = -(1/6\pi^2)[(\pi\,\partial_\mu\pi)^2 - (\pi)^2(\partial_\mu\pi)^2] - (m_\pi{}^2/F_\pi{}^2)\,\lambda_1\pi^2 \cdot \pi^2. \tag{A23}$$

With

$$\lambda_1 = (3/8)(I_4'(n)/I_2'(n)) - \tfrac{1}{8}(I_5'(n)/I_3'(n)), \tag{A24}$$

we obtain

$$\begin{aligned} a_0 &= (m_\pi{}^2/2\pi F_\pi{}^2)(1/3 + (5/2)\,\lambda_1)\,m_\pi^{-1}, \\ a_2 &= (m_\pi{}^2/2\pi F_\pi{}^2)(-(1/6) + \lambda_1)\,m_\pi^{-1}. \end{aligned} \tag{A25}$$

Taking $m_\pi{}^2 m_\pi^{-1}/8\pi F_\pi{}^2 = 0{,}11$, we verify that for $n = 3$ we reobtain the Weinberg's value 0,2 and $-0{,}06$.

For the case $n = 6$, we obtain, for example,

$$\begin{aligned} a_0 &= -0{,}13, \\ a_2 &= -0{,}18. \end{aligned}$$

Acknowledgments

The author is indebted to Prof. L. Michel for his interest in the work and helpful suggestions. It is a pleasure to thank A. Chakrabarti, C. de Calan and T. N. Pham for useful discussions.

References

1. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166** (1968), 1568.
2. M. Gell-Mann, R. J. Oakes and B. Renner, *Phys. Rev.* **175** (1968), 2195; S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968), 224.
3. K. J. Barnes and C. J. Isham, *Nucl. Phys. B* **17** (1970), 267.
4. S. P. Rosen and A. McDonald, *Phys. Rev. D* **4** (1971), 1833.
5. A. Chakrabarti and C. Darzens, *Ann. Phys.* **69** (1972), 193.
6. L. Michel and L. Radicati, *in* "Symmetry Principles at High Energy," Fifth Coral Gables Conference, p. 19, Benjamin, New York, 1968; *Ann. Phys.* **66** (1971), 758; L. Michel, *C. R. Acad. Sci. Paris* **272** (1971), 433.

7. G. Cicogna, F. Strocchi and R. V. Cafarelli, *Phys. Rev. D* **1** (1970), 1197.
8. This is mathematically characterized by the fact that the normalizer of $G(x)$ coincides with $G(x)$. For example, when the little group is $U(2)^u \times U(1)$ ($U(1)$ generated by $\exp i\varphi Y_5$), the normalizer coincides with it, but not for the $U(2)^d$ little group, whose normalizer is still $U(2)^d \times U(1)$.
9. If m and n are real, it is to be understood as $(m, n) + (n, m)$, and if $n = \bar{m}$, as $(n, \bar{n}) + (\bar{n}, n)$.
10. B. Renner and A. Sudbery, *Nucl. Phys. B* 13 (1969), 27.
11. See, for example, Hamermesh, "Group Theory and Its Applications to Physical Problems," p. 148, Addison–Wesley, Reading, MA, 1962.
12. H. Harari, *Phys. Rev. Lett.* **16** (1966), 964.
13. J. A. Cronin, *Phys. Rev.* **161** (1967), 1483.
14. F. Gürsey, *Nuovo Cimento* **16** (1960), 230.
15. After having completed our calculations, we received a paper by P. H. Dondi (DAMTP 72/3, University of Cambridge) which gives a different method for such calculations.
16. S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **17** (1966), 616.
17. A. M. Perelomov and V. S. Popov, *Soviet JNP* **3** (1966), 676.
18. L. Michel, private communication.
19. L. Michel, unpublished.
20. A. M. Harun-Ar Rashid and M. A. Rashid, *Phys. Rev. D* **3** (1971), 581. These authors treat the case $n = 8$.

Printed by the St Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium.

D E U X I E M E P A R T I E

QUANTIFICATION LUMIERE DES LAGRANGIENS DE YANG-MILLS

INTRODUCTION

Nous allons, dans cette seconde partie, appliquer à un Lagrangien invariant de jauge de deuxième espèce une variante, dite quantification lumière, du mode de quantification habituelle d'un Lagrangien. Cette technique, qui débouche sur un calcul perturbatif de la matrice S, est l'aboutissement d'un chemin initié par Weinberg [1]. Weinberg transcrivait un calcul perturbatif "à la Heitler" de la matrice S dans un repère se mouvant à une vitesse proche de celle de la lumière, et retenait les graphes dominants dans ce repère. Cette méthode a été utilisée par divers auteurs [2] pour traiter de façon avantageuse certains processus de l'électrodynamique à haute énergie.

Il a été réalisé graduellement [3,2] que l'on était naturellement conduit à adopter de nouvelles variables de "temps" et d'"espace" : $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z)$ et $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z)$, et à utiliser dans ce repère de moment presque infini la strucutre d'un sous-groupe Galiléen du groupe de Poincaré. Ce sous-groupe est le groupe d'invariance d'un hyperplan tangent au cône de lumière ($nx = 0$, $n^2 = 0$), qui peut être considéré comme la limite d'un hyperplan $t = 0$ vu dans un repère d'impulsion tendant vers l'infini. Il était dès lors naturel [4,5] de se fixer les conditions initiales (commutateurs des champs) sur un tel plan $nx = 0$ au lieu du plan habituel $t = 0$, de choisir un nouvel Hamiltonien $H = \bar{n}_\mu P^\mu$ ($n\bar{n} = 1$, $n^2 = 0$) pour propager le mouvement dans la variable $\tau = nx$, et d'utiliser l'analogie non relativiste du sous-groupe "cinématique" Galiléen correspondant. Une théorie des perturbations "à la Heitler" permet alors de retrouver les résultats de la méthode de Weinberg [6].

Une retombée particulièrement intéressante de cette quantification lumière a été de procurer un formalisme adapté à l'étude d'une particule vue dans un système de référence ayant une vitesse relative proche de celle de la lumière : l'effet relativiste de ralentissement du temps fige les constituants de la particule, les partons, et l'on espère comprendre en terme de propriétés supposées simples des partons les propriétés complexes de la particule [7]. Des modèles [6,8] utilisant la quantification lumière ont été ainsi élaborés, et ils donnent une consistance

appréciable à l'idée des partons, mettant en évidence par exemple le phénomène d'invariance d'échelle de Bjorken et Feynman [7].

Dans cette partie de notre travail, nous allons effectuer la quantification lumière des théories de Yang-Mills, massives ou non. Ces théories, considérées maintenant comme renormalisables, ont apporté récemment, grâce à leur potentiel unificateur, une grande variété de modèles des interactions faibles, électromagnétiques et fortes. Bien que peu testables jusqu'à présent l'existence de ces modèles et les traits intéressants qu'ils montrent nous semblent une motivation suffisante de ce mode de quantification, et nous espérons en outre déboucher sur une possibilité d'effectuer certains calculs sur ces modèles, simplifiés par cette technique. Notons également l'intérêt purement théorique d'une quantification d'un Lagrangien possédant une invariance locale, puisqu'à part la quantification dans la jauge unitaire de Weinberg [10], on est réduit à déduire les règles de Feynman par des méthodes fonctionnelles et avec des champs superflus.

Les deux premiers chapitres établissent les notions nécessaires et les notations propres aux Lagrangiens de Yang-Mills et au voisinage du cône de lumière, et se terminent par la quantification lumière du Lagrangien de Yang-Mills renormalisable le plus général. Dans les deux chapitres suivants, nous abordons la question du calcul en perturbation de la matrice S à partir du Hamiltonien obtenu, en ayant pris garde de faire éventuellement intervenir le mécanisme de Higgs Kibble qui modifie notablement le contenu de la théorie, et de sa compatibilité avec la méthode fonctionnelle habituelle d'obtention des règles de Feynman.

Dans le dernier chapitre, relativement indépendant du reste, nous étudions un choix de polarisations adapté à la quantification sur un plan tangent au cône de lumière, et nous y verrons qu'indépendamment de cette origine, ces polarisations peuvent présenter par certaines de leurs caractéristiques un intérêt dans d'autres circonstances. Ce cinquième chapitre est constitué d'un article précédé d'une courte introduction.

*
* *

Chapitre I - LE LAGRANGIEN GENERAL DE YANG-MILLS

1.- INVARIANCE DE JAUGE LOCALE

L'électodynamique habituelle fournit l'exemple le plus simple d'une théorie de Yang-Mills : le Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi_i(x), A_\mu(x))$ qui décrit l'interaction des champs $\varphi_i(x)$, de charge e_i, avec le champ électromagnétique $A_\mu(x)$ est choisi invariant par les transformations :

$$\varphi_i(x) \to e^{ie_i\Lambda(x)} \varphi_i(x)$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \qquad (1)$$

$\Lambda(x)$ étant une fonction arbitraire de x.

L'ensemble de ces transformations forme un groupe Abélien en chaque point de l'espace, et l'invariance du Lagrangien par ce groupe est dite locale (ou de deuxième espèce) du fait de l'arbitraire de la fonction $\Lambda(x)$.

On construit facilement un tel Lagrangien en utilisant les dérivées des champs sous une forme covariante :

$$D_\mu \varphi_i(x) = \partial_\mu \varphi_i(x) - i\, e_i\, A_\mu(x)\, \varphi(x) \qquad (2)$$

qui se transforme par (1) comme les champs φ_i :

$$D_\mu \varphi_i(x) \to e^{ie_i\Lambda(x)} D_\mu \varphi_i(x) \qquad (3)$$

et

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \qquad (4)$$

qui est invariant par (1).

Cette notion d'invariance de jauge locale a été généralisée par Yang et Mills [9] au groupe non-Abélien de l'isospin. De la même façon que précédemment, l'invariance locale par un groupe G compact représenté sur les champs $\varphi_i(x)$ de la théorie est réalisée par l'adjonction de champs de jauge (équivalents du champ électromagnétique) $A_{\alpha\mu}$ donnant une représentation adjointe du groupe G.

Notant T_α une base de l'algèbre de Lie de la représentation adjointe de G, orthogonale pour le produit de Cartan, les T_α satisfont à :

$$[T_\alpha, T_\beta] = i\, C_{\alpha\beta\gamma}\, T_\gamma \tag{4}$$

Les $C_{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de structure du groupe G.

Notons que nous laissons la normalisation des T_α arbitraire (afin d'inclure dans la suite les constantes de couplage dans la définition des $C_{\alpha\beta\gamma}$). Les générateurs de chaque sous-groupe simple apparaissant dans la décomposition de G ont ainsi leur propre normalisation.

La loi de transformation des champs de jauge mis sous la forme matricielle

$$A_\mu = \sum_\alpha A_{\alpha\mu} T_\alpha$$

par l'élément $U(x) = \exp i\, \Lambda_\alpha(x)\, T_\alpha$ du groupe G est alors :

$$A'_\mu(x) = U(x)\, A_\mu(x)\, U(x)^{-1} + i\partial_\mu U(x) \cdot U(x)^{-1} \tag{5}$$

ce qui donne sous forme infinitésimale

$$A'_{\alpha\mu} = A_{\alpha\mu} - C_{\alpha\beta\gamma}\Lambda_\beta A_{\gamma\mu} - \partial_\mu \Lambda_\alpha \tag{6}$$

On vérifie que la combinaison

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i[A_\mu, A_\nu] \tag{7}$$

(qui donne en projection sur T_α

$$F_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu A_{\alpha\nu} - \partial_\nu A_{\alpha\mu} - C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta\mu} A_{\gamma\nu})$$

se transforme par (5) comme

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U\, F_{\mu\nu}\, U^{-1} \tag{8}$$

La loi de transformation correspondante des autres champs $\{\varphi_i\}$ de la théorie sera sous forme matricielle :

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \exp\,(i\, \Lambda_\alpha(x)\, t_\alpha)\, \varphi(x). \tag{9}$$

Les matrices t_α représentant les générateurs infinitésimaux du gruupe G dans la représentation $\{\varphi_i\}$ et satisfont à :

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\, c_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma\ . \tag{10}$$

On voit facilement que la combinaison $D_\mu\varphi$, appelée dérivée covariante :

$$D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi + i\, A_{\alpha\mu} t_\alpha \varphi \tag{11}$$

se transforme comme

$$D_\mu\varphi(x) \rightarrow \exp\, i\, \Lambda_\alpha(x) t_\alpha . D_\mu\varphi(x) \tag{12}$$

ce qui permet d'écrire par exemple l'invariant

$$(D_\mu\varphi, D^\mu\varphi) = \sum_i D_\mu\varphi_i D^\mu\varphi_i \tag{13}$$

L'utilisation des $F_{\mu\nu}$, φ, $D_\mu\varphi$ va nous permettre d'obtenir le Lagrangien invariant de jauge le plus général pour nos besoins dans le paragraphe suivant.

2.- CHOIX DU LAGRANGIEN

Nous travaillerons sur le Lagrangien le plus général qui soit invariant de jauge locale par un groupe de Lie compact G, et qui satisfasse les critères usuels de renormalisabilité

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\mu\nu}F_{\alpha}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu\Phi, D^\mu\Phi) + i\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu D_\mu\psi - \bar{\psi}\,m_o\psi - \wp(\Phi) - \bar{\psi}(\Gamma,\Phi)\psi \quad (1$$

Les notations (que nous empruntons à Weinberg [10] qui a utilisé ce Lagrangien pour calculer les règles de Feynman dans la jauge unitaire) sont les suivantes :

α) Les champs de jauge $A_{\alpha\mu}$ sont classés dans la représentation adjointe de G ; les générateurs infinitésimaux correspondants sont notés T_α (on note que $(T_\alpha)_{\beta\gamma} = -i\,c_{\alpha\beta\gamma}$ comme on le voit sur l'identité de Jacobi liant les $c_{\alpha\beta\gamma}$) et satisfont à

$$[T_\alpha, T_\beta] = i\,c_{\alpha\beta\gamma}T_\gamma \qquad (15)$$

Comme nous l'avons dit précédemment, l'arbitraire de la normalisation des T_α permet d'inclure les constantes de couplage dans la définition des $c_{\alpha\beta\gamma}$. A chaque sous-groupe simple apparaissant dans la décomposition de G correspond de la sorte une constante de couplage.

Les $F_{\alpha\mu\nu}$ sont donnés par (7).

β) Les champs de bosons Φ_p sont classés dans une représentation réelle D_B, ce qui est toujours possible en doublant au besoin la représentation de G, les générateurs infinitésimaux de G étant représentés par des matrices θ_α, normalisées par

$$[\theta_\alpha, \theta_\beta] = i\,c_{\alpha\beta\gamma}\theta_\gamma \qquad (16)$$

(D_B étant une représentation réelle, les θ_α sont purement imaginaires et antisymétriques).

Les dérivées covariantes $D_\mu\Phi$ sont ($\Phi = \{\Phi_p\}$)

$$D_\mu \Phi = \partial_\mu \Phi + i\, A_{\alpha\mu} \theta_\alpha \Phi \tag{17}$$

γ) Les champs ψ_n de la théorie sont classés dans une représentation D_F de G, dont les générateurs infinitésimaux correspondants sont représentés par des matrices t_α hermitiennes normalisées par

$$[t_\alpha, t_\beta] = i\, c_{\alpha\beta\gamma} t_\gamma \tag{18}$$

Les dérivées covariantes sont ($\psi = \{\psi_n\}$)

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi + i\, t_\alpha A_{\alpha\mu} \psi \tag{19}$$

Les matrices t_α contiennent éventuellement des termes proportionnels à γ_5 ce qui permet de classer

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi \quad \text{et} \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi \tag{20}$$

dans des représentations $D_F^{(L)}$ et $D_F^{(R)}$ différentes.

Décomposant t_α en

$$t_\alpha = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) t_\alpha + \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) t_\alpha = t_\alpha^L + t_\alpha^R , \tag{21}$$

t_α^L et t_α^R vérifient :

$$[t_\alpha^L,\ t_\beta^L] = i\, c_{\alpha\beta\gamma}\, t_\gamma^L$$

$$[t_\alpha^R,\ t_\beta^R] = i\, c_{\alpha\beta\gamma}\, t_\gamma^R$$

$$[t_\alpha^R,\ t_\beta^L] = 0 \tag{22}$$

et sont les générateurs correspondant à $D_F^{(L)}$ et $D_F^{(R)}$.

La matrice de masse m_o est choisie de telle sorte que $\bar{\psi}\, m_o \psi$ soit un invariant, soit la condition

$$[t_\alpha, \gamma_o m_o] = 0 \qquad (23)$$

Cela peut ne pas être possible, auquel cas le Lagrangien (14) ne contiendra pas de terme de masse pour les fermions. (Cette éventualité dépend bien sûr du contenu des représentations $D_F^{(L)}$ et $D_F^{(R)}$, nous reportons à [10] pour l'étude de (23)).

δ) $\mathcal{P}(\Phi)$ est un polynôme de degré au plus égal à 4, invariant par G. Suivant les valeurs des coefficients de ce polynôme, les valeurs moyennes sur le vide $\lambda_p = \langle 0 | \Phi_p | 0 \rangle$ seront ou non nulles (voir première partie, chap. I, ap. B). A l'ordre des graphes en arbre les λ_p correspondent à un extremum de $\mathcal{P}(\lambda)$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\lambda)}{\partial \lambda_p} = 0 \qquad (24)$$

Dans le cas $\lambda_p \neq 0$, il faudra faire une translation sur les champs Φ_p pour obtenir les champs physiques de la théorie.

ε) $\bar{\psi}\,(\Gamma, \Phi)\psi = \bar{\psi}\,\Gamma_p\,\psi\,\Phi_p$ représente une interaction de Yukawa entre les champs ψ et Φ. Les matrices Γ_p permettent d'extraire de $\bar{\psi}$ et ψ une représentation D_B (les conditions à remplir sont examinées par Weinberg [10]).

* * *

Chapitre II - QUANTIFICATION LUMIERE DU LAGRANGIEN DE YANG-MILLS

1.- QUANTIFICATION SUR UN PLAN TANGENT AU CONE DE LUMIERE

La méthode de quantification canonique consiste à se donner les relations de commutation des champs et de leurs moments conjugués sur un plan à temps constant. Ayant ainsi fixé les conditions initiales sur ce plan, le Hamiltonien P^o donne l'évolution dans le temps des opérateurs de la théorie. Plus généralement, on peut se fixer les commutateurs sur une surface de genre espace quelconque (asymptotiquement plate) afin d'avoir un formalisme covariant (Schwinger, Tomonaga [11]). Mais d'autres possibilités existent ; citons le travail récent de Fubini, Hanson et Jackiw [12] qui utilisent une surface x^2 = constante positive = τ^2 comme surface de quantification, les dilatations propageant alors le mouvement en τ (la surface $x^2 = \tau^2$ n'étant pas asymptotiquement plate, les résultats de Schwinger-Tomonaga ne s'appliquent pas).

Nous nous intéresserons à l'alternative développée par Neville et Rohrlich [5] et Kogut et Soper [4] qui ont montré qu'il était possible dans certains cas, notamment dans le cas de l'électrodynamique quantique, de se fixer les relations de commutation sur un plan tangent au cône de lumière

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + z) = \text{constante}$$

le "Hamiltonien" $\frac{1}{\sqrt{2}} (P^o - P^3)$ permettant d'obtenir l'évolution dans la variable τ des opérateurs de la théorie. Nous parlerons dans un tel cas d'une quantification "lumière".

Nous allons montrer ce mode de quantification dans le cas simple de champs scalaires, mais auparavant nous allons introduire une notation commode pour ce formalisme [4].

Les coordonnées habituelles étant notées (t, x, y, z) on définit

$$(x^o,\ x^1,\ x^2,\ x^3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + z),\ x,\ y,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(t - z)\right) \qquad (1)$$

Dans cette nouvelle base le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ a pour seules composantes non nulles

$$g_{o3} = g_{3o} = - g_{11} = - g_{22} = 1 \qquad (2)$$

et permet d'abaisser les indices :

$$(x_o,\ x_1,\ x_2,\ x_3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(t - z),\ - x,\ - y,\ \frac{1}{\sqrt{2}}(t + z)\right) \qquad (3)$$

On adoptera la même notation pour tout quadrivecteur, et plus généralement pour tout tenseur. Pour désigner les quantités exprimées dans le système de coordonnées habituelles, il est utile de les distinguer par un "chapeau". On aura par exemple :

$$P_3 = P^o = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}^o + \hat{p}^3)$$

$$P^3 = P_o = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p}^o - \hat{p}^3) \qquad (4)$$

Par commodité on désignera parfois les indices 1 et 2 par une lettre latine, i ou j, dans ce qui suivra.

Considérons maintenant à titre d'exemple des champs scalaires réels φ_α décrits par un Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi_o\, \partial_\mu \varphi_\alpha)$. Le "Hamiltonien" induisant le mouvement dans la variable $\tau = x^o$ est (nous notons $dx^1 dx^2$ par d^2x_T):

$$H(x^o) = \int dx^3\, d^2x_T \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta\, \partial_o \varphi_\alpha}\, \partial_o \varphi_\alpha - \mathcal{L}(\varphi\ \partial_\mu \varphi_\alpha)\right) \qquad (5)$$

Comme en fait nous supposons que le Lagrangien est invariant par translation, H est indépendant de x^o. Nous gardons cependant la notation $H(x^o)$ pour rappeler que la densité du Hamiltonien est évaluée à x^o

Calculant $\left[H(x^o),\ \varphi_\beta(y)\right]_{x^o=y^o}$, il vient :

$$\int dx^3\, d^2x_T \Big\{ \partial_o\varphi_\alpha(x) \Big[\frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta\, \partial_o\varphi_\alpha}\,,\ \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o}$$

$$+ \frac{\delta\, \mathcal{L}(x)}{\delta\, \partial_o\varphi_\alpha} \Big[\partial_o\varphi_\alpha(x),\ \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} - \frac{\delta\, \mathcal{L}(x)}{\delta\, \varphi_\alpha} \Big[\varphi_\alpha(x)\ \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o}$$

$$- \frac{\delta\, \mathcal{L}(x)}{\delta\, \partial_\mu\varphi_\alpha} \Big[\partial_\mu\varphi_\alpha(x),\ \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} \Big\} \qquad (6)$$

La composante en $\big[\partial_o\varphi_\alpha, \varphi_\beta\big]$ disparaît. Utilisant les équations du mouvement

$$\partial_\mu \frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta\, \partial_\mu\varphi_\alpha} - \frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta\, \varphi_\alpha} = 0 \qquad (7)$$

il reste

$$\int dx^3 d^2x_T \Big\{ \partial_o\varphi_\alpha(x) \Big[\frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta\, \partial_o\varphi_\alpha}\,(x),\ \varphi(y)\Big]_{x^o=y^o} - \partial_o \frac{\delta \mathcal{L}(x)}{\delta\, \partial_o\varphi_\alpha} \Big[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} \Big\}$$

(8)

Dans le cas d'un couplage non dérivatif, $\frac{\delta\, \mathcal{L}}{\delta\, \partial_o\varphi_\alpha} = \partial_3\varphi_\alpha$, ce terme provenant de l'énergie cinétique

$$\frac{1}{2}\, \partial_\mu\varphi_\alpha \partial^\mu\varphi_\alpha = \partial_o\varphi_\alpha \partial_3\varphi_\alpha - \frac{1}{2}\, \partial_i\varphi_\alpha \partial_i\varphi_\alpha \qquad (9)$$

il reste

$$\Big[H(x^o), \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} = -\,2 \int dx^3 d^2x_T \partial_o \partial_3 \varphi_\alpha(x) \Big[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} \qquad (10)$$

<u>On en déduit</u> que les relations de commutation

$$\Big[\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y)\Big]_{x^o=y^o} = -\,\frac{i}{4}\, \delta_{\alpha\beta}\, \epsilon(x^3 - y^3)\, \delta^2(x_T - y_T)$$

$$= i\, \delta_{\alpha\beta}\, \Delta(x - y)_{x^o=y^o} \qquad (11)$$

(que l'on aurait dans une théorie sans interaction) donnent la bonne loi

d'évolution des champs

$$\left[H,\ \varphi_\beta(y)\right] = -\ i\ \partial_o \varphi_\beta(y) \tag{12}$$

Cependant une telle quantification lumière est plus difficile à réaliser lorsqu'on travaille avec des champs qui ne sont pas tous indépendants, notamment s'il y a une invariance de jauge locale. On doit alors dans un premier temps identifier les champs indépendants avant de fixer leurs relations de commutation à τ constant. Tung-Mow Yan [13] a étudié le cas de bosons vectoriels massifs en utilisant une méthode de quantification "à la Schwinger". Sa méthode pourrait être utilisée dans le cas d'une invariance de jauge locale afin d'obtenir les relations de commutation désirées. Cependant, par souci de brièveté, nous préférerons par la suite poser ces relations de commutation en prenant appui sur le travail de Kogut et Soper [4], quitte à vérifier ensuite leur bien fondé.

2.- QUANTIFICATION DU LAGRANGIEN

Nous allons maintenant quantifier le Lagrangien (I 14) sur un plan τ = constante. Pour cela nous allons utiliser les équations du mouvement afin de faire un choix de champs indépendants, ce qui va se révéler possible en imposant la condition $A^o_\alpha = 0$. Nous adaptons dans ce paragraphe le travail de Kogut et Soper [4].

Les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}_\alpha = J^\nu_\alpha \tag{13}$$

en définissant le courant J^ν_α

$$J^\nu_\alpha = c_{\alpha\beta\gamma}\, A_{\beta\mu}\, F^{\mu\nu}_\alpha + i\ \Phi\ \theta_\alpha\ D^\nu \Phi + \bar{\psi}\ \gamma^\nu t_\alpha \psi \tag{14}$$

$$\left\{ i\ \gamma^\mu D_\mu - m_o - (\Gamma, \Phi) \right\} \psi = 0 \tag{15}$$

$$\partial_\mu D^\mu \Phi = -\ i\ \theta_\alpha A_{\alpha\mu} D^\mu \Phi - \frac{\delta P(\Phi)}{\delta \Phi} - \bar{\psi}\ \Gamma\ \psi \tag{16}$$

La condition $A^o_\alpha = 0$ simplifie ces équations. Compte tenu du fait que $F^{\mu o}_\alpha = - \partial_3 A^\mu_\alpha$, il vient en utilisant (13) pris pour $\nu = 0$

$$- \partial_3 \partial_\mu A^\mu_\alpha = J^o_\alpha$$

soit :

$$\partial_3 \partial_3 A^3 = - J^o - \partial_3 \partial_i A^i \tag{17}$$

Cette équation peut être résolue en utilisant l'opérateur intégral $\frac{1}{\eta}$ défini par

$$(\frac{1}{\eta} f)(x) = - \frac{1}{2} i \int d\xi \, \epsilon(x^3 - \xi) \, f(x^o, x_T, \xi)$$

$$(\frac{1}{\eta^2} f)(x) = - \frac{1}{2} \int d\xi \, |x^3 - \xi| \, f(x^o, x_T, \xi) \tag{18}$$

Nous choisissons pour solution de (17)

$$A^3 = \frac{1}{\eta^2} (J^o + \partial_3 \partial_i A^i) \tag{19}$$

Ce choix revient à fixer des conditions aux limites que nous ne préciserons pas, travaillant de façon formelle et justifiant ce formalisme par son accord final avec le formalisme traditionnel.

(19) nous conduit à choisir pour les champs de jauge les composantes indépendantes $A_i, (i = 1,2)$.

Quant aux champs spinoriels, multipliant (15) par γ^o et utilisant à nouveau la condition $A^o = 0$, il vient (nous utilisons $(\gamma^o)^2 = 0$)

$$i \, \partial_3 \, \gamma^o \, \gamma^3 \, \psi = \gamma^o \left[i \, \gamma^j \, D_j + m_o + (\Gamma, \Phi) \right] \Psi \tag{20}$$

A ce point nous introduisons les opérateurs de projection hermitiens P_+ et P_- (nous choisissons des matrices de Dirac satisfaisant à $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu$)

$$P_+ = \frac{1}{2} \gamma^3 \, \gamma^o, \quad P_- = \frac{1}{2} \gamma^o \, \gamma^3, \quad \text{avec } P_+ + P_- = 1 \tag{21}$$

et $P_+ P_- = 0$ (nous donnons en appendice les identités nécessaires sur les γ^μ).

Nous posons :

$$\psi_+ = P_+ \psi \quad \text{et} \quad \psi_- = P_- \psi \tag{22}$$

La relation $\gamma^o = \gamma^o P_+$ permet d'écrire (20) comme

$$\partial_3 \psi_- = - \frac{i}{2} \left[i \gamma^j D_j + m_o + (\Gamma, \psi) \right] \gamma^o \psi_+ \tag{23}$$

dont nous adoptons la solution

$$\psi_-(x) = \frac{1}{2\eta} \left\{ \gamma^o \left[i \gamma^j D_j + m_o + (\Gamma, \Phi) \right] \psi_+ \right\} \tag{24}$$

Si nous choisissons pour les matrices $\hat{\gamma}_\mu$ la représentation

$$\hat{\gamma}^o = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\gamma}^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^\alpha \\ \sigma^\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{25}$$

on obtient en notant $\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$

$$\psi_+ = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ 0 \\ 0 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \quad , \qquad \psi_- = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

et (24) exprime donc ψ_2 et ψ_3 en fonction de ψ_1, ψ_4, A_i et Φ, ce qui conduit à prendre ψ_1 et ψ_4 comme composantes indépendantes des champs spinoriels.

En résumé, nous faisons le choix des composantes indépendantes $A_{\alpha i}$, ψ_{+n} et Φ_p, les relations (19) et (24) liant les autres composantes à celles-ci.

Nous allons voir maintenant que la forme des opérateurs de tran

lation P_1, P_2, P_3 nous permet de deviner les règles de commutation entre ces champs indépendants, mais nous pouvons déjà poser (paragraphe 3)

$$\left[\Phi_p(x),\ \Phi_q(y)\right]_{x^o=y^o} = -\frac{i}{4}\,\delta_{pq}\,\epsilon(x^3-y^3)\,\delta^2(x_T-y_T) \qquad (27)$$

Le tenseur d'énergie-impulsion T^μ_ν

$$T^\mu_\nu = \sum_i \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\varphi_i}\,\partial_\nu\varphi_i - g^\mu_\nu\,\mathcal{L}(\varphi_i) \qquad (28)$$

correspondant à un Lagrangien $\mathcal{L}(\varphi_i)$ permet en tenant compte de $\partial_\mu T^\mu_\nu = 0$ d'écrire :

$$P_\mu = \int dx^3 d^2x_T\ T^o_\mu = \int dx^3\ d^2x_T\ \left(\frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\partial_o\varphi_i}\,\partial_\mu\varphi_i - g^o_\mu\,\mathcal{L}(\varphi_i)\right) \qquad (29)$$

Puisque $g^o_\mu = \delta_{o\mu}$, les moments P_α, $\alpha = 1,2,3$, sont particulièrement simples :

$$P_\alpha = \int dx^3 d^2x_T\ \frac{\delta\,\mathcal{L}}{\delta\partial_o\varphi_i}\,\partial_\alpha\varphi_i \qquad (30)$$

Dans notre cas, nous obtenons

$$T^o_\alpha = \partial_3 A_i\,\partial_\alpha A_i + i\,\bar\psi\,\gamma^o\partial_\alpha\psi + \partial_3\Phi\,\partial_\alpha\Phi \qquad (31)$$

Cette simplicité correspond au fait que les P_α laissent la surface τ constante invariante et sont donc purement cinématiques.

Nous faisons maintenant une transformation de Fourier à τ constant sur les champs $A_{\alpha i}$ et ψ_{n+}, en incluant dès à présent les bons facteurs, afin de faire apparaître des opérateurs qui vont se révéler des opérateurs de création et d'annihilation des bosons de jauge et des fermions.

$$A^j(\tau,x_T,Z) = \left[2(2\pi)^3\right]^{-1/2} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{\lambda=1}^{2} \delta_{\lambda j} \Big\{ \exp\left[-i(\eta Z - p_T\cdot x_T\right]$$

$$a(p_T,\eta;\lambda;\tau) + \exp\left[+i(\eta Z - p_T x_T)\right]\ a^+(p_T,\eta;\lambda,\tau) \Big\} \qquad (32)$$

$$\psi_+(\tau,x_T,Z) = 2^{-1/4}(2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta^{1/2}} \sum_{S=\pm\frac{1}{2}} \Big\{ w(S)\, \exp\big[-i(\eta Z - p_T x_T)\big]$$

$$b(p\ ;\ S\ ;\ \tau)$$

$$+\ w(-S)\, \exp\big[+i(\eta Z - p_T x_T)\big]\, d^\dagger(p\ ;\ s;\ \tau) \Big\} \qquad (33)$$

avec :

$$w_n(+\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad w_n(-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (34)$$

Nous notons $p_3 = \eta$; $(x^o,\ x_i,\ x^3) = (\tau,\ x_T, Z)$.

Portant ces expressions dans (31), il vient

$$P_\alpha(\psi) = \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{S=\pm\frac{1}{2}} p_\alpha \big[b^\dagger(p;S;\tau) b(p;S;\tau) - d(p;S;\tau)\, d^\dagger(p;S;\tau) \big] \quad (34)$$

$$P_\alpha(A) = \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta}\, p_\alpha \sum_{\lambda=1}^{2} \frac{1}{2} \big[a(p;\lambda;\tau)\, a^\dagger(p;\lambda;\tau) + a^\dagger(p;\lambda;\tau) a(p;\lambda;\tau) \big] \quad (36$$

(nous sous-entendons bien sûr la sommation sur n et sur α).

La forme de ces opérateurs nous conduit bien à interpréter les $a, b, d, a^\dagger$, $b^\dagger$, $d^\dagger$ comme opérateurs d'annihilation et de création de bosons de jauge, de fermions et d'antifermions d'impulsion et de nombre quantique correspondant.

D'où les relations de commutation que nous postulons

$$\big[a_\alpha(p;\lambda;\tau),\ a^\dagger_\beta(p';\lambda';\tau) \big] = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\lambda\lambda'}\eta\ \delta(\eta-\eta')\ \delta^2(p_T - p'_T) \qquad (37)$$

$$\big\{ b_n(p;s;\tau),\ b^\dagger_p(p';s';\tau) \big\} = \big\{ d_n(p;s;\tau), d^\dagger_p(p';s';\tau) \big\}$$

$$= \delta_{np}\ \delta_{ss'}\ \eta\ \delta(\eta-\eta')\ \delta^2(p_T - p'_T) \qquad (38)$$

Dans l'espace des coordonnées, nous obtenons les relations de commutation correspondantes :

$$\left[A^i_\alpha(x),\ A^j_\beta(y)\right]_{x^o=y^o} = -\frac{1}{4}\, i\, \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\, \epsilon(x^3 - y^3)\, \delta^2(x_T - y_T) \qquad (39)$$

$$\left\{\psi_{n+}(x),\ \psi^\dagger_{p+}(y)\right\}_{x^o=y^o} = \delta_{np}\, \frac{1}{\sqrt{2}}\, \delta(x^3 - y^3)\, \delta^2(x_T - y_T) \qquad (40)$$

qui jointes à (27) sont les relations de commutation à τ constant que nous postulerons.

A ce point, nous devons vérifier que P_o engendre bien la translation en x^o

$$\left[P_o,\ \varphi(x)\right] = -\, i\, \partial_o \varphi(x) \qquad (41)$$

$\varphi(x)$ étant l'un des champs de la théorie. On doit vérifier de même que les autres opérateurs de moment et de moment angulaire engendrent les translations et rotations correspondantes.

La vérification est facile pour les opérateurs P_α ($\alpha = 1,2,3$) et les opérateurs de moment angulaire M_{12}, M_{13} et M_{23} qui laissent le plan x^o = constante invariant, et sont donc purement cinématiques. Par contre la vérification pour les opérateurs "dynamiques" tels que P_o est très longue, quoique ne présentant pas de difficultés, aussi nous ne la reproduirons pas. Elle se traite essentiellement de la même façon que pour l'électrodynamique spinorielle [4].

* * *

APPENDICE

IDENTITES SUR LES MATRICES DE DIRAC

Les matrices de Dirac et leurs combinaisons P_+ et P_- satisfont à des identités que nous utiliserons souvent dans nos calculs. Ces identités découlent de la relation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad \text{A1}$$

$g^{\mu\nu}$ étant le nouveau tenseur métrique dont les seules composantes non nulles sont $g^{03} = g^{30} = -g^{11} = -g^{22} = 1$.

$$\text{Définissant } P_+ = \frac{1}{2}\gamma^3\gamma^o \quad \text{et} \quad P_- = \frac{1}{2}\gamma^o\gamma^3 \qquad \text{A2}$$

On vérifie que P_+ et P_- sont des projecteurs orthogonaux

$$(P_\pm)^2 = P_\pm$$

$$P_+ + P_- = 1$$

$$P_+P_- = P_-P_+ = 0 \qquad \text{A3}$$

Notons les diverses relations :

$$\gamma^3 P_+ = P_-\gamma^3 = \gamma^o P_- = P_+\gamma^o = 0$$

$$\gamma^3 P_- = P_+\gamma^3 = \gamma^3 \quad ; \quad \gamma^o P_+ = P_-\gamma^o = \gamma^o$$

$$\hat{\gamma}^o\gamma^o = \sqrt{2}\, P_+ \quad , \quad \hat{\gamma}^o\gamma^3 = \sqrt{2}\, P_- \qquad \text{A4}$$

Nous choisirons les matrices $\hat{\gamma}^\mu$ des anciennes notations satisfaisant à : $\hat{\gamma}^{\mu\dagger} = \hat{\gamma}_\mu$, d'où il découle l'hermiticité des projecteurs $P_\pm$:

$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma_\mu$ entraînant

$$P_\pm^\dagger = P_\pm \qquad \text{A5}$$

* * *

Chapitre III

MECANISME DE HIGGS-KIBBLE ET CALCUL EN PERTURBATION DE LA MATRICE S

Nous allons maintenant utiliser les relations de commutation précédentes afin de calculer la matrice S, au moins de façon formelle en perturbation.

1.- CALCUL DU HAMILTONIEN

Le calcul de "Hamiltonien" $H = P_o$ par la formule (II.29) donne

$$H = \int dx^3 d^2x_T \; (\partial_o A_i \partial_3 A_i + \partial_o \Phi \partial_3 \Phi + i \bar{\psi} \gamma^o \partial_o \psi - \mathcal{L}) \qquad (1)$$

dans lequel on doit remplacer ψ_- et A^3 par leurs fonctions de ψ_+, A_i et Φ.

Cependant, nous voulons avoir pour les lignes extérieures de notre matrice S des particules physiques et pour cela nous devons exprimer H en fonction de champs physiques. Or, nous savons que tel n'est pas forcément le cas avec les champs $\Phi(x)$. Le polynôme $P(\Phi)$, suivant les valeurs de ses paramètres, peut induire des valeurs $< 0 | \Phi_p(x) | 0 > = \lambda_p$ différentes de zéro (et des masses imaginaires). Nous avons vu dans le chapitre I de la première partie qu'à l'ordre des graphes en arbre les λ_p correspondaient à un extremum du potentiel $\mathcal{P}(\lambda)$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(\lambda)}{\partial \lambda_p} = 0 \qquad (2)$$

Dans un tel cas les champs physiques sont les champs translatés

$$\varphi_p(x) = \Phi_p(x) - \lambda_p \qquad (3)$$

vérifiant $< 0 | \varphi_p(x) | 0 > = 0$. Mais une différence importante avec la cassure chirale du vide que nous avons considérée dans la première partie va se manifester : un élément du groupe de symétrie du Lagrangien ne laissant pas λ_p invariant, et par conséquent le vide, se traduisait alors par l'apparition d'un boson de Goldstone, particule de masse nulle. Dans

le cas présent nous allons voir que ce degré de liberté va se trouver absorbé comme degré de liberté d'un boson de jauge qui va acquérir une masse lors de la translation des champs Φ. Un avantage du formalisme lumière va être de n'utiliser que des champs physiques et de mettre en évidence ce mécanisme, utilisé pour la première fois par Higgs et Kibble [14].

Tout d'abord, nous allons introduire de nouvelles notations qui vont permettre de manier commodément le mécanisme de Higgs-Kibble. Nous allons travailler en toute généralité sur les champs $\varphi(x)$ définis par (3), en incluant le cas particulier $\{\lambda_p\} = 0$. Dans le cas $\{\lambda_p\} \neq 0$ nous appellerons H le petit groupe de ce vecteur, de générateurs ρ_s, $s = 1,\ldots,u$:

$$\rho_s \lambda = 0 \tag{4}$$

Nous nommerons les autres générateurs Ω_ℓ, $\ell = 1,\ldots,v$

$$\Omega_\ell \lambda \neq 0 \tag{5}$$

Nous supposerons avoir fait un changement de base orthogonale sur les générateurs du groupe G de telle sorte que

$$\{\theta_\alpha\} = \{\rho_s, \Omega_\ell\} \tag{6}$$

avec donc la propriété correspondante sur les matrices t_α et T_α.

Pour obtenir le cas $\{\lambda_p\} = 0$ dans la suite des calculs, il suffira de faire $\lambda = 0$, $H = G$, $\rho_\alpha = \theta_\alpha$.

Notons que les scalaires λ_p commutant entre eux, les relations de commutation des Φ (II.27) se traduisent par les nouvelles relations

$$\left[\varphi_p(x), \varphi_q(y)\right]_{x^o=y^o} = -\frac{i}{4}\,\delta_{pq}\,\varepsilon(x^3 - y^3)\,\delta^2(x_T - y_T) \tag{7}$$

et que le Hamiltonien (1) n'est évidemment pas modifié ; il suffit de porter $\Phi = \varphi + \lambda$ dedans.

Les équations de contrainte (II.19) et (II.24) prennent avec les champs φ la nouvelle forme

$$A^3 = \frac{1}{\eta^2} (\partial_3 \partial_i A^i + i \lambda \theta \partial_3 \varphi + J'^o) \tag{8}$$

avec

$$J'^o = \partial_3 A^\mu \times A_\mu + i \varphi \theta \partial_3 \varphi + \bar{\psi} \gamma^o t \psi \tag{9}$$

(Nous adoptons les notations

$$c_{\alpha\beta\gamma} f_\beta g_\gamma = (f \times g)_\alpha$$

$$c_{\alpha\beta\gamma} h_\alpha f_\beta g_\gamma = (f \times g, h) = (f, g, h) \tag{10}$$

Notons également que $i\lambda\theta_\alpha \partial_3 \varphi_q$ par exemple est une forme condensée de $i\lambda_p (\theta_\alpha)_{pq} \partial_3 \varphi_q$)

et

$$\psi_- = \frac{1}{2\eta} \{\gamma^o [i\gamma^j D_j + m'_o + (\Gamma, \varphi)] \Psi_+\} \tag{11}$$

avec $m'_o = m_o + (\Gamma, \lambda)$ (12)

Les contraintes (8) et (11) mélangeant une partie linéaire dans les champs et une partie quadratique d'interaction, nous allons les séparer en définissant de nouvelles quantités $\mathcal{A}_\mu$ et ψ' qui seront ainsi que nous le verrons, les opérateurs dans le "schéma d'interaction".

Nous poserons $A^i = \mathcal{A}^i$, $\mathcal{A}^3 = 0$

et $A^3 = \mathcal{A}^3 + \xi$ (13)

avec $\mathcal{A}^3 = \frac{1}{\eta^2} (\partial_3 \partial_i \mathcal{A}^i + i\lambda\theta\partial_3\varphi)$ (14)

$$\xi = \frac{1}{\eta^2} J'^o \tag{15}$$

et $\psi_- = \psi'_- + \delta$ (16)

avec

$$\delta = \frac{1}{2\eta}\gamma^0\{[-t\,a_j\gamma^j + (\Gamma,\varphi)] \quad \psi_+\} \tag{17}$$

$$\psi'_- = \frac{1}{2\eta}\{[i\,\partial_j\gamma^j + m'_o]\,\gamma^o\psi_+\} \tag{18}$$

et définissons

$$\psi' = \psi'_- + \psi_+ \tag{19}$$

Un calcul simple donne la densité du Hamiltonien dans ces nouveaux champs

$$H(x) = H_o(x) + V_1(x) + V_2(x) \tag{20}$$

avec

$$H_o = \sqrt{2}\,\psi'^{\dagger}_- \frac{i}{2}\overleftrightarrow{\partial_3}\psi'_- + \frac{1}{2}(\partial_i a_j)^2 + \frac{1}{2}(a_\mu\theta\lambda)^2 + \frac{1}{2}(\partial_i\varphi)^2 - \frac{1}{2}(\lambda\theta\varphi)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{P}(\lambda)}{\partial\lambda_p\partial\lambda_q}\varphi_p\varphi_q \tag{21}$$

$$V_1 = -(a^\mu, a^\nu, \partial_\mu a_\nu) + \frac{1}{4}(a^\mu \times a^\nu, a_\mu \times a_\nu) + \bar{\psi}'[t\,a_\mu\gamma^\mu + (\Gamma,\varphi)]\psi' + (a_\mu\theta\lambda)(a^\mu\theta\varphi) - i\,a^\mu\partial_\mu\varphi\theta\varphi + \frac{1}{2}(a_\mu\theta\varphi)^2 + Q^I(\varphi) \tag{22}$$

$$V_2 = J'^o\frac{1}{2\eta^2}J'^o + \sqrt{2}\,\delta^\dagger\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\partial_3}\delta \tag{23}$$

Nous avons noté $Q^I(\varphi)$ la partie d'interaction

$$Q^I(\varphi) = \mathcal{P}(\lambda+\varphi) - \mathcal{P}(\lambda) - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{P}(\lambda)}{\partial\lambda_p\partial\lambda_q}\varphi_p\varphi_q \tag{24}$$

Le symbole $\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu$ que nous avons introduit est défini par la combinaison hermitienne

$$f \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu g = f \frac{i}{2} \partial_3 g - \frac{i}{2} \partial_3 f . g \qquad (25)$$

qui remplace les quantités non hermitiennes $fi\partial_\mu g$ que nous avons utilisées jusqu'à présent dans nos calculs. De la même façon, nous sous-entendons que $-i\mathcal{A}^\mu \partial_\mu \varphi \theta \varphi$ dans V_1 doit se lire $\mathcal{A}^\mu_\alpha (\theta_\alpha)_{pq} \varphi_p \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_\mu \varphi_q$.

Remarquons également que les opérateurs $\mathcal{A}_\mu$ ne commutant pas entre eux, les expressions contenant des produits de $\mathcal{A}_\mu$ doivent être considérées comme symétrisées à chaque fois qu'il y a ambiguïté sur l'ordre des facteurs.

2.- ETUDE DE H_o

Nous allons étudier H_o et montrer que ce Hamiltonien décrit l'évolution sans interaction dans le "temps" $\tau = x^o$ de bosons de jauge massifs, de bosons de jauge de masse nulle, de fermions et de scalaires. Les termes quadratiques dans les champs $\mathcal{A}_\mu$ et φ se révèleront naturellement être des termes de masse, aussi allons-nous commencer par diagonaliser ces termes.

a) Bosons de jauge

Le terme $\frac{1}{2}(\mathcal{A}_\mu \theta \lambda)^2$ s'écrit $+ \frac{1}{2} \mathcal{A}_{\alpha\mu} \mathcal{A}^\mu_\beta (\theta_\alpha \lambda, \theta_\beta \lambda)$. Par un changement de base orthonormal réel sur les $\mathcal{A}_{\alpha\mu}$ nous pouvons diagonaliser la matrice symétrique et réelle (les θ_α étant purement imaginaires puisque D_B est une représentation réelle) $(\theta_\alpha \lambda, \theta_\beta \lambda)$. Nous supposerons à partir de maintenant que l'on a choisi dès le départ une telle base (qui respecte évidemment la décomposition $\theta_\alpha = (\beta_s, \Omega_\ell)$ suivant les générateurs β_s du petit groupe de λ).

Ainsi nous posons

$$- (\Omega_\ell \lambda, \Omega_m \lambda) = \delta_{\ell m} M^2_\ell \qquad (26)$$

avec bien sûr, puisque $\rho_s \lambda = 0$

$$(\rho_s \lambda, \rho_t \lambda) = 0 \tag{27}$$

M_ℓ^2 est bien positif puisque les Ω_ℓ sont proportionnels à i. Nous noterons les bosons correspondants $\mathcal{B}_\ell$, $\ell = 1,\ldots,v$, les autres étant notés $\mathcal{A}_s$, $s = 1,\ldots,u$.

Soit donc

$$\frac{1}{2}\,(\mathcal{A}_\mu \theta\lambda)^2 = -\sum_\ell \frac{1}{2}\;\mathcal{B}_{\ell\mu}\,\mathcal{B}^{\mu}_{\ell}\,M_\ell^2 = -\frac{1}{2}\,M_\ell^2(\mathcal{B}_{\ell\mu})^2 \tag{28}$$

b) Scalaires

Le terme $-\frac{1}{2}(\lambda\theta\varphi)^2$ s'écrit $-\frac{1}{2}\left[(\theta_\alpha)_{pq}\lambda_q\varphi_p\right]^2$, ou encore, puisque de par la propriété $\rho_s\lambda = 0$ la sommation sur α porte seulement sur les indices ℓ : $-\frac{1}{2}\left[(\Omega_\ell)_{pq}\lambda_q\varphi_p\right]^2$. Nous faisons alors le changement de base réel et orthonormal sur les φ_p

$$\chi_\ell = \frac{-i(\Omega_\ell)_{pq}\lambda_q\varphi_p}{\sqrt{\sum_{p'}\left[(i\Omega_\ell)_{p'q}\lambda_q\right]^2}} = \frac{-i(\Omega_\ell)_{pq}\lambda_q}{M_\ell}\,\varphi_p$$

$$\xi_r = \Sigma\,\alpha_{rp}\varphi_p \tag{29}$$

$\ell = 1,\ldots,v$.

Les ξ_r sont certaines combinaisons des φ que nous n'aurons pas besoin de spécifier et qui complètent le changement de base orthonormal.

Soit

$$-\frac{1}{2}(\lambda\theta\varphi)^2 = \frac{1}{2}\,M_\ell^2\,\chi_\ell^2 \tag{30}$$

quant au terme $\frac{1}{2}\,\frac{\delta^2\mathcal{P}(\lambda)}{\delta\lambda_p\,\delta\lambda_q}\,\varphi_p\varphi_q$ de H_o, il ne contribue pas aux masses des χ_ℓ, mais seulement aux masses des ξ_s : ceci est l'équivalent du théorème de Goldstone dans le cas des théories de Yang-Mills. On le voit en uti-

lisant l'invariance de $\mathcal{P}(\Phi)$ par le groupe G, qui se traduit par

$$\mathcal{P}(\Phi) = \mathcal{P}(\Phi + i\theta_\alpha \wedge_\alpha \Phi) = \mathcal{P}(\Phi) + \frac{\delta \mathcal{P}(\Phi)}{\delta \Phi_p} i(\theta_\alpha \wedge_\alpha \Phi)_p \qquad (31)$$

soit

$$\frac{\delta \mathcal{P}(\Phi)}{\delta \Phi_p}(\theta \wedge \Phi)_p = 0 \qquad (32)$$

En différenciant par rapport à Φ_q, il vient

$$\frac{\delta^2 \mathcal{P}(\Phi)}{\delta \Phi_p \delta \Phi_q}(\theta_\alpha \Phi)_p + \frac{\delta \mathcal{P}(\Phi)}{\delta \Phi_p}(\theta_\alpha)_{pq} = 0 \qquad (33)$$

Nous faisons dans (33) $\Phi = \lambda$ et nous tenons compte de la condition $\frac{\delta \mathcal{P}(\lambda)}{\delta \lambda} = 0$; il reste

$$\frac{\delta^2 \mathcal{P}(\lambda)}{\delta \lambda_p \delta \lambda_q}(\theta_\alpha \lambda)_p = 0 \qquad (34)$$

Faisant le changement de base (29) sur $\frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{P}(\lambda)}{\delta \lambda_p \delta \lambda_q} \varphi_p \varphi_q$ on voit alors facilement que la condition (34) annule les termes quadratiques en χ_ℓ, ainsi que les termes croisés en $\chi_\ell \xi_s$. Nous noterons

$$\frac{1}{2} \frac{\delta^2 \mathcal{P}(\lambda)}{\delta \lambda_p \delta \lambda_q} \varphi_p \varphi_q = \frac{1}{2} \mu_s^2 \xi_s^2 \qquad (35)$$

(En supposant les coefficients α_{sp} choisis de façon à diagonaliser la matrice de masse).

c) Fermions

Quant à la matrice hermitienne $m'_o = m_o + (\Gamma, \lambda)$ que nous avons obtenue, elle est comme nous allons le voir la matrice de masse des fermions. On peut la diagonaliser par une transformation unitaire sur les ψ_m, aussi nous supposons avoir pris dès le départ une base $\{\psi_m\}$ diagonalisant m'_o.

d) Les opérateurs dans le schéma d'interaction

Jusqu'à présent, nous avons manipulé les divers champs dans le schéma de Heisenberg. Dans les formules (II.32) et (II.33) cela se traduit par la dépendance en τ des opérateurs a_α, b_n et d_m. Afin de calculer la matrice S en perturbation, nous allons les évaluer dans le schéma d'interaction. Pour cela nous prenons les opérateurs dans le schéma d'Heisenberg à $\tau = 0$ et nous leur donnons la dépendance en τ due à H_o. Cette dépendance est facile à obtenir comme nous allons le voir sur l'exemple des bosons $\chi_\ell(x)$.

D'après ce que nous avons vu au paragraphe b), le Hamiltonien des χ est

$$H_o(\chi) = \int dx^3\, d^2x_T \left\{ \sum_\ell \left(\frac{1}{2} (\partial_i \chi_\ell)^2 + \frac{1}{2} M_\ell^2 \chi_\ell^2 \right) \right\} \qquad (36)$$

L'équivalent des développements de Fourier (II.32) et (II.33) pour le champ χ à τ donné, que l'on obtiendrait de la même façon, est :

$$\chi_\ell(\tau, x_T, Z) = \left[2(2\pi)^3 \right]^{-\frac{1}{2}} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \Big[-i \exp -i(\eta Z - p_T x_T)\; a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau) + i \exp i(\eta Z - p_T x_T)\; a_\ell^\dagger (p_T, \eta; 0; \tau) \Big] \qquad (37)$$

Les $a^\dagger$ se révèleront être des créateurs de bosons de jauge d'hélicité zéro, d'où l'indice 0 des a et $a^\dagger$.

Portant dans $H_o(\chi)$, on obtient :

$$H(\chi) = \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_\ell \frac{p_T^2 + M_\ell^2}{2\eta} \; \frac{1}{2} \left\{ a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau)\; a_\ell^\dagger (p_T, \eta; 0; \tau) + h.c \right\} \qquad (38)$$

(38) montre que $a_\ell^\dagger$ crée une particule d'"énergie" $p_o = \dfrac{p_T^2 + M_\ell^2}{2\eta}$, donc de masse M_ℓ, ainsi que nous l'avions dit par anticipation au paragraphe b

Utilisant les relations de commutation (obtenues comme pour II(37) et (38) :

$$\left[a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau),\; a_m^\dagger(p_T', \eta'; 0; \tau) \right] = \delta_{lm}\, \eta \delta(\eta - \eta')\; \delta^2(p_T - p_T') \qquad (39)$$

il vient

$$-i \frac{\partial}{\partial \tau} a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau) = \left[H, a_\ell(p_T, \eta; 0, \tau)\right] = - \frac{p_T^2 + M_\ell^2}{2\eta} a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau)$$

soit en posant $p_o = \frac{p_T^2 + M_\ell^2}{2\eta}$, $p_\mu p^\mu = M_\ell^2$:

$$a_\ell(p_T, \eta; 0; \tau) = \exp -i\, p_o \tau . a_\ell(p_T, \eta; 0; 0)$$

d'où

$$\chi_\ell(x) = \left[2(2\pi)^3\right]^{-\frac{1}{2}} \int d^2 p_T \int \frac{d\eta}{\eta} \{-i \exp -i\, p.x.a_\ell(p;o) + i \exp i\, p.x.a_\ell^\dagger(p;0)\} \qquad (40)$$

(nous supprimons l'indice $\tau = 0$: $a(p;0;0) = a(p;0)$).

Les calculs étant exactement les mêmes pour les autres opérateurs, nous donnons directement leur expression dans le schéma d'interaction ; pour les bosons de jauge, nous utilisons le développement en impulsion (II.32) ainsi que la relation (II.19).

Bosons de jauge de masse nulle :

$$\mathcal{A}_s^\mu(x) = \left[2(2\pi)^3\right]^{-\frac{1}{2}} \int d^2 p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{\lambda=\pm 1} e_\lambda(p)^\mu \{\exp -i\, p\, x.c_s(p;\lambda) + \exp i\, p\, x.c_s^\dagger(p;\lambda)\} \qquad (41)$$

Bosons de jauge massifs :

$$B_{\ell\mu} - \frac{1}{M_\ell} \partial_\mu \chi_\ell = \left[2(2\pi)^3\right]^{-\frac{1}{2}} \int d^2 p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{\lambda=-1}^{1} e\lambda(p)_\mu \{\exp -i\, p\, x.a_\ell(p;\lambda) + \exp i\, p\, x.a_\ell^\dagger(p;\lambda)\} \qquad (42)$$

Bosons scalaires :

$$\xi_r(x) = \left[2(2\pi)^3\right]^{-\frac{1}{2}} \int d^2 p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \{-i \exp -i\, p\, x.f_r(p) + i \exp -i\, p\, x.f_r^\dagger(p)\} \qquad (43)$$

Fermions :

$$\psi'_n(x) = \left[2(2\pi)^3\right]^{-1/2} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{s=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \{u(p,s) \exp -i\ p\ x\ b_n(p;s) + v(p,s) \exp i\ p\ x\ d_n^\dagger(p;s)\} \quad (44)$$

Les diverses polarisations utilisées sont les suivantes :

$$e_1^\mu(p) = -\ 2^{-1/2}\ (0,1,i,(p^1 + ip^2)/\eta)$$

$$e_{-1}^\mu(p) = 2^{1/2}\ (0,1,-i,(p^1 - ip^2)/\eta)$$

$$e_o^\mu(p) = \frac{1}{M}\ (p_3, p^1, p^2, p_o - \frac{M^2}{p_3}) \quad (45)$$

Ainsi que les spineurs :

$$u(p,\tfrac{1}{2}) = 2^{-1/4}\ \eta^{-1/2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\ \eta \\ p^1 + ip^2 \\ m \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u(p,-\tfrac{1}{2}) = 2^{-1/4}\ \eta^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ m \\ -p^1 + ip^2 \\ \sqrt{2}\ \eta \end{bmatrix}$$

$$v(p,+\tfrac{1}{2}) = 2^{-1/4}\ \eta^{-1/2} \begin{bmatrix} 0 \\ -m \\ -p^1 + ip^2 \\ \sqrt{2}\ \eta \end{bmatrix}$$

$$v(p,-\tfrac{1}{2}) = 2^{-1/4}\ \eta^{-1/2} \begin{bmatrix} \sqrt{2}\ \eta \\ p^1 + ip^2 \\ -m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Nous avons donné le développement en impulsion des champs de bosons de jauge massifs sous la forme $\mathcal{B}_\mu - \frac{\partial_\mu \chi}{M}$ qui met en évidence le rôle des bosons χ_ℓ tels que nous allons maintenant les interpréter. Ils apportent aux bosons de jauge massifs $\mathcal{B}_{\alpha\mu}$ le degré de liberté qui leur manque, c'est-à-dire l'hélicité zéro $e_o^\mu(p)$; $e_o^\mu(p)$ s'interprète aisément comme hélicité zéro dans un repère $p_1 = p_2 = 0$, de même que les polarisations $\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1^\mu \pm i\, e_2^\mu)$ comme hélicités + 1 et - 1. Les $e_\lambda^\mu(p)$ vérifient bien sûr $e_\lambda^\mu(p)\, p_\mu = 0$.

Le champ $\psi'(x)$ vérifiant l'équation de Dirac, les spineurs $u(p,s)$ et $v(p,s)$ sont reliés par conjugaison de charge, ainsi qu'on peut le vérifier. Ils sont normalisés à

$$\bar{u}(p,s)\, u(p,s') = 2m'\, \delta_{ss'}$$

Nous les retrouverons dans le dernier chapitre où leur structure sera éclaircie, mais pour l'instant nous soulignons seulement leur interprétation physique : l'indice s est l'hélicité du fermion correspondant mesurée dans un système de référence s'éloignant à la vitesse de la lumière dans la direction $-\hat{x}^3 = z$.

3.- CALCUL EN PERTURBATION

Le paragraphe précédent a montré que H_o décrivait l'évolution sans interaction de bosons de jauge massifs, de bosons de jauge de masse nulle, de scalaires, de fermions et d'antifermions créés respectivement par c_ℓ^+, a_s^+, f_r^+, b_n^+ et d_n^+. $V_1 + V_2$ quant à eux perturbent le mouvement de ces particules et nous allons exprimer formellement la matrice S en perturbation par rapport à $V_1 + V_2$ considéré comme petit.

Pour cela, utilisons la vieille théorie des perturbations [15] qui donne le développement de la matrice $S = U(\tau = +\infty, \tau = -\infty)$:

$$S_{fi} = 1 - 2\pi i\, \delta(\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_i)\left[V + V(\mathcal{H} - H_o + i\varepsilon)^{-1} V + \ldots\right] \qquad (47)$$

avec $V = \int dx^3 d^2x_T \; (V_1(x) + V_2(x))\Big|_{x^o=0}$ (48)

Les états $|p,\alpha>$, α numérotant les nombres quantiques de la particule, sont normalisés a :

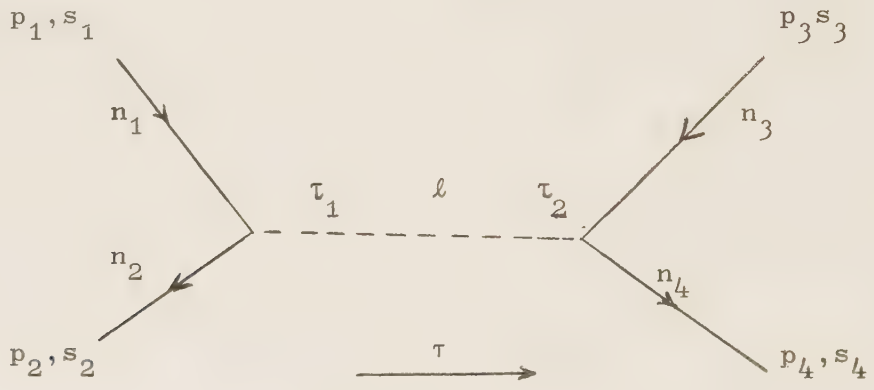
$$< p,\alpha|p',\alpha' > = < 0|[a(p,\alpha), a^{\dagger}(p',\alpha')]|0 > \qquad (49)$$

$$= \delta_{\alpha\alpha'}, p_3 \; \delta(p_3 - p_3') \delta^2(p_T - p_T')$$

ce qui donne

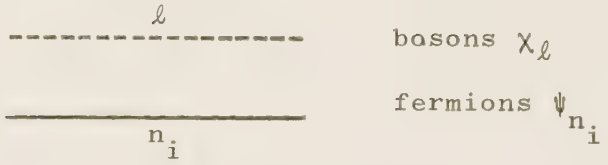
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\alpha} \prod_{i=1}^{n} \int d^2p_{iT} \int_o^{\infty} \frac{dp_{i3}}{p_{i3}} |p_1,\alpha_1;\ldots p_n,\alpha_n > < p_1,\alpha_1,\ldots,p_n,\alpha_n| = \mathbb{1} \qquad (50)$$

Insérant (50) entre les opérateurs de (47) nous permet d'obtenir des règles de calcul de diagrammes analogues aux règles de Feynamn. Prenons comme exemple le diagramme :



(1)

avec pour rotations :



(51)

Ce diagramme correspond à un terme de la forme

$V(\mathcal{H} - H_o + i\epsilon)^{-1}V$, dans le développement de (47).

Nous obtenons (nous prenons les notations $(x^3, x_T) = \underline{x}$,

$\mathcal{H}_i = p_o(1) + p_o(2)$ et $\mathcal{H}_f = p_o(3) + p_o(4)$:

$$-2\pi i\,\delta(\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_i) < 3,4 \Big| \int d\underline{x}\ \bar{\psi}'(x)\ \Gamma_\ell \psi'(x) \chi_\ell(x)\ \frac{1}{\mathcal{H} - H_o + i\varepsilon}$$

$$\int d\underline{y}\ \bar{\psi}'(y) \Gamma_\ell \psi'(y) \chi_\ell(y) \Big| 1,2 > \quad (52)$$

Nous utilisons les développements de Fourier (44) et (40) et intégrons sur x et y ; il vient après un court calcul :

$$-2\pi i\,\delta(\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_i)\ \bar{u}(4)(4\pi)^{-3/2}\ \Gamma_{\ell, n_4 n_3}\ v(3) \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{dp_3}{p_3}\ \delta^3(\underline{p_3} + \underline{p_4} - \underline{p})$$

$$\frac{1}{\mathcal{H}_i - p_o + i\varepsilon}\ \delta^3(\underline{p_1} + \underline{p_2} - \underline{p})\ \bar{v}(2)(4\pi)^{-3/2}\ \Gamma_{\ell, n_2 n_1}\ u(1) \quad (53)$$

Nous voyons apparaître sur cet exemple les règles de calcul : aux vertex correspondent le couplage $(4\pi)^{-3/2} \Gamma_{\ell, n_i n_j}\ \delta^3(\underline{p_i} + \underline{p_j} - \underline{p})$, à la ligne interne le propagateur $\frac{1}{\mathcal{H} - p_o + i\varepsilon}$ et une intégration $\int d^2p_T \int_o^\infty \frac{dp_3}{p_3}$, et aux lignes externes les spineurs u, $\bar{u}$, v ou $\bar{v}$. Nous aurions pu calculer de la même façon le graphe (1) avec $\tau_2 < \tau_1$. Nous aurions trouvé aux vertex $\delta^3(\underline{p_3} + \underline{p_4} + \underline{p})$ et $\delta^3(\underline{p_1} + \underline{p_2} + \underline{p})$ qui intégrés sur $\int_o^\infty \frac{dp_3}{p_3}$ auraient donné zéro. Cela est un élément simplificateur de ce type de perturbation "τ ordonnée".

Ces règles pourraient être généralisées aisément à l'ensemble du Hamiltonien $V_1 + V_2$ mais leur énumération serait fastidieuse et nous préférons calculer seulement deux propagateurs dont nous aurons besoin.

a) Propagateur de $B_{\ell\mu}$

Ce propagateur provient de termes de la forme

$$\mathcal{A}_\mu(x) \int d^2p_T \int \frac{dp_3}{p_3}\ \frac{|p, \lambda > <p, \lambda|}{\mathcal{H} - p_o + i\varepsilon}\ \mathcal{A}_\nu(y) \quad (54)$$

λ dénotant l'hélicité du boson intermédiaire.

En utilisant les développements de Fourier (40) et (42), on obtient pour le propagateur (l'intégration sur x et y et les facteurs afférents sont incorporés aux vertex voisins) :

$$\frac{1}{\mathcal{H}-p_o+i\epsilon}\left\{\sum_{\lambda=\pm 1} e_\mu(p,\lambda)\, e_\nu(p,\lambda) + M_\ell^2 \frac{n_\mu n_\nu}{pn}\right\} \tag{55}$$

Nous avons adopté la notation $n_\mu = g_{\mu 3}$, permettant de rendre plus covariant l'aspect du propagateur et mettant en évidence le rôle du vecteur du genre lumière n_μ choisi dans la quantification.

b) Propagateur croisé $B_{\ell\mu}, \chi_\ell$

Ce propagateur provient de termes contenant l'expression

$$a_\mu(x) \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{dp_3}{p_3} \frac{|p;\lambda \times p;\lambda|}{\mathcal{H}-p_o+i\epsilon}\, \chi(y) \tag{56}$$

nous le noterons :

(57)

Utilisant à nouveau (40) et (42), (56) donnera le propagateur

$$\frac{1}{\mathcal{H}-p_o+i\epsilon}\; i\frac{M_\ell}{pn} n_\mu \tag{58}$$

CONCLUSION

Nous avons obtenu ainsi des règles formelles de calcul de la matrice $S = U(\tau = +\infty, \tau = -\infty)$ ordre par ordre dans la perturbation V_1+V_2. Il se pose maintenant le problème de la compatibilité de ce développement avec les règles de Feynman des théories Yang-Mills obtenues récemment par des méthodes fonctionnelles [16,17]. Ce sera la justification en dernier ressort de la validité de la quantification lumière effectuée. Mais cela n'a rien d'évident car la méthode fonctionnelle introduit des particules supplémentaires appelées fantômes et travaille

avec des degrés de liberté supplémentaires ; or, l'un des intérêts de la quantification lumière est justement de ne travailler qu'avec des champs ayant une interprétation physique.

Nous allons examiner cette équivalence dans le chapitre suivant et cette comparaison des deux théories nous permettra en outre de discuter brièvement les problèmes de renormalisation qui se posent, puisque le développement (47) contient des intégrales divergentes et doit donc être considéré comme formel.

***

Chapitre IV

REGLES DE FEYNMAN T-ORDONNEES ET COMPATIBILITE

1.- CHOIX DE LA JAUGE

Les règles de Feynman des théories Yang-Mills sont obtenues par une méthode fonctionnelle dont nous résumons les résultats essentiels [16,17,18]. On ajoute tout d'abord au Lagrangien choisi un terme de jauge $-\frac{1}{2} C_\alpha^2$ qui casse l'invariance de jauge locale. Puis on couple les champs de la théorie avec des scalaires de statistique de Fermi-Dirac appelés fantômes deFaddeev-Popov[16], ce couplage dépendant de la fonction C_α. Ces bosons ne seront utilisés que décrivant des boucles dans les graphes de Feynman et leur rôle peut être considéré comme de restaurer l'unitarité de la théorie.

Si on écrit symboliquement la variation de la fonction C_α par la transformation infinitésimale de jauge de paramètres Λ_β (nous reprenons les notations des chapitres précédents : il y a donc autant de fonctions C_α que de générateurs du groupe de jauge G).

$$\delta C_\alpha = \hat{T}_{\alpha\beta} \Lambda_\beta \qquad (1)$$

$\hat{T}_{\alpha\beta}$ étant un opérateur différentiel, le Lagrangien des fantômes de Faddeev-Popov est :

$$\mathcal{L}(\omega) = \omega_\alpha^* \hat{T}_{\alpha\beta} \omega_\beta \qquad (2)$$

Les propagateurs de la théorie sont alors obtenus en inversant la partie quadratique du Lagrangien, le reste du Lagrangien changé de signe donnant les vertex. La fonction C est choisie usuellement linéaire dans les champs de la théorie et ainsi chaque fonction $-\frac{1}{2} C^2$ choisie donnera des propagateurs différents, donc des règles de Feynman différentes. Le problème de l'invariance de la matrice S par ce choix pose des difficultés que l'on admet généralement comme résolues [18,19]. Les diverses jauges $-\frac{1}{2} C^2$ étant supposées équivalentes, le problème de la

renormalisabilité est résolu en choisissant une jauge manifestement renormalisable. L'unitarité n'est alors pas évidente [19], mais la possibilité du choix d'une jauge unitaire montre l'élimination des particules non physiques de la théorie [10].

La latitude qui existe sur la fonction de jauge va nous permettre d'obtenir les règles de Feynman les plus propices à la comparaison avec les résultats du chapitre précédent. Nous sommes conduits à adopter la fonction de jauge $-\frac{1}{2\alpha}(An)^2$, (nous noterons pour la commodité dans ce chapitre $A^o = A^\mu n_\mu$, avec $n_\mu = g_{\mu 3}$, $n_\mu n^\mu = 0$) en remarquant intuitivement qu'en faisant tendre α vers zéro, on donne une masse infinie à la composante An qui se découple ainsi des autres champs. Les règles de Feynman prises à $\alpha = 0$ auront alors les meilleures chances de permettre la comparaison avec la condition $A^o = 0$ adoptée pour la quantification lumière.

Il nous a semblé intéressant dans un Appendice à ce chapitre de mener le calcul d'un moment magnétique anormal dans cette jauge $-\frac{1}{2\alpha}(An)^2$, $(\alpha \to 0)$, et de vérifier qu'il redonne le résultat obtenu dans la jauge unitaire. On voit sur cet exemple que l'invariance de jauge des théories de Yang-Mills n'est pas triviale.

2.- REGLES DE FEYNMAN

An se transforme par (16) comme

$$A_\alpha n \to A_\alpha n - (C_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma n + n\partial\, \delta_{\alpha\beta})\Lambda_\beta \qquad (3)$$

ce qui donne pour le Lagrangien du fantôme de Faddeev-Popov :

$$\mathcal{L}(\omega) = -\frac{1}{\alpha}\omega^* n\partial\omega - \frac{1}{\alpha}(\omega^*, \omega, A_n) \quad . \qquad (4)$$

Le Lagrangien (I.14) devient

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha}(An)^2 + \frac{1}{2}D_\mu \Phi D^\mu \Phi + i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} m_o \psi$$

$$-\rho(\Phi) - \bar{\psi}(\Gamma, \Phi)\psi - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\omega^* n\partial\omega - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\omega^*, \omega, An) \qquad (5)$$

avec $\Phi = \lambda + \varphi$.

Utilisant les notations du chapitre III, la partie quadratique

du Lagrangien est :

$$\mathcal{L}_o = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{s\nu}-\partial_\nu A_{s\mu})(\partial^\mu A_s^\nu - \partial^\nu A_s^\mu)$$

$$-\frac{1}{4}(\partial_\mu B_{\ell\nu}-\partial_\nu B_{\ell\mu})(\partial^\mu B_\ell^\nu-\partial^\nu B_\ell^\mu) + \frac{1}{2} M_\ell^2 B_{\ell\mu}B_\ell^\mu - M_\ell \partial_\mu \chi_\ell B_\ell^\mu + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2$$

$$+\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi_r)^2 - \frac{1}{2}\mu_r^2 \xi_r^2$$

$$+ i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} m' \psi$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\omega^* n \partial \omega \qquad (6)$$

Tandis que la partie d'interaction est (nous gardons pour simplifier la notation $A_{\alpha\mu}$ pour l'ensemble des champs $B_{\ell\mu}$ et $A_{s\mu}$, ainsi que φ_p pour χ_ℓ et ξ_r)

$$\mathcal{L}_I = (A^\mu, A^\nu, \partial_\mu A_\nu) - \frac{1}{4}(A^\mu \times A^\nu, A_\mu \times A_\nu)$$

$$+ \bar{\psi}\left[t\, A_\mu \gamma^\mu + (\Gamma, \varphi)\right]\psi$$

$$- (A_\mu \theta\lambda)(A^\mu \theta\varphi) + i\, A^\mu \partial_\mu \varphi \theta\varphi - \frac{1}{2}(A_\mu \theta\varphi)^2$$

$$- Q^I(\varphi)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(\omega^*, \omega, An) \qquad (7)$$

La méthode habituelle donne pour les divers propagateurs :

$$\int e^{ipx} < T A_{s\mu}(x) A_{s\nu}(0) > dx = \frac{i}{p^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{pn}\right) - \frac{i\alpha}{(pn)^2} p_\mu p_\nu \qquad (8)$$

$$\int e^{ipx} < T B_{\ell\mu}(x) B_{\ell\nu}(0) > dx = \frac{i}{p^2 - M_\ell^2}\left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{pn}\right) - \frac{i\alpha}{(pn)^2} p_\mu p_\nu \qquad (9)$$

$$\int e^{ipx} < T B_{\ell\mu}(x) \chi_\ell(0) > dx = \frac{1}{p^2 - M_\ell^2}\,\frac{M_\ell n_\mu}{pn} - \alpha M_\ell \frac{p_\mu}{(pn)^2} \qquad (10)$$

$$\int e^{ipx} < T \chi_\ell(x) \chi_\ell(0) > dx = \frac{i}{p^2 - M_\ell^2} - i\alpha \frac{M_\ell^2}{(pn)^2} \qquad (11)$$

$$\int e^{ipx} < T \xi_r(x) \xi_r(0) > dx = \frac{i}{p^2 - \mu_r^2} \qquad (12)$$

$$\int e^{ipx} < T\psi_n(x)\bar{\psi}_n(0) > dx = \frac{i}{\not p - m_n} \qquad (13)$$

$$\int e^{ipx} < T\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(0) > dx = \frac{\sqrt{\alpha}}{pn} \qquad (14)$$

Quant aux vertex de la théorie, ils sont donnés par $-\mathcal{L}_I$.

Nous remarquerons les deux points intéressants suivants : lorsque $\alpha = 0$, valeur que nous choisissons maintenant, on vérifie que $n_\mu D^{\mu\nu}(x) = 0$, $D^{\mu\nu}(x)$ étant le propagateur d'un champ de jauge, massif ou non. Aussi les composantes $A_s n$ et $B_\ell n$ ne se propagent pas à l'intérieur des graphes de Feynman. Elles ne peuvent apparaître qu'aux lignes extérieures, et nous pourrons imposer sur les états physiques les conditions :

$$A_s n|i> = 0 \qquad B_\ell n|i> = 0 \qquad (15)$$

de façon consistante. D'autre part, les fantômes de Faddeev-Popov ne sont couplés qu'aux $A_s n$ et $B_\ell n$. Ils ne contribuent donc à la matrice S que par des boucles fermées d'où partent des lignes extérieures $A_s n$ ou $B_\ell n$ et ils sont ainsi exclus de la théorie.

Il nous reste pour clore ce paragraphe à discuter un aspect du formalisme fonctionnel qui sera vital dans ce qui va suivre. Dans ce formalisme, on obtient les fonctions de Green par dérivation fonctionnelle par rapport à des sources extérieures $J_i(x)$ de

$$S(J) = < T \exp -i \int dx \, (\mathcal{L}(\mathscr{A}) + \mathscr{A}_i J_i) \qquad (16)$$

(nous notons $\mathscr{A}_i$ le champ général de la théorie.)

Cependant dans le cas d'une théorie de Yang-Mills, les sources ne sont pas toutes indépendantes, mais sont liées par une relation qui assure l'invariance de jauge des fonctions de Green [18]. Cette relation s'obtient de la façon suivante : définissant l'opérateur $\hat{S}$ par la transformation de jauge infinitésimale de paramètres Λ_α

$$\mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_i + \hat{S}_{i\alpha}\Lambda_\alpha \tag{17}$$

les sources J_i sont assujetties à la relation

$$J_i \hat{S}_{i\alpha} = 0 \tag{18}$$

Dans notre cas (I.6) et (I.9) définissent $\hat{S}$ comme (nous ne nous occupons pas des fermions) :

$$\hat{S}_{\alpha\mu,\beta} = - C_{\alpha\beta\gamma}A_{\gamma\mu} - \delta_{\alpha\beta}\partial_\mu$$

$$S_{p,\alpha} = i\theta_{\alpha,pq}(\lambda_q+\varphi_q) \tag{19}$$

soit la condition sur les sources $J_{\alpha\mu}$ et J_p des bosons de jauge et des bosons scalaires :

$$-J_{\alpha\mu}(c_{\alpha\beta\gamma}A_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\beta}\partial^\mu) + J_p\, i\theta_{\beta,pq}(\lambda_q+\varphi_q) = 0 \tag{20}$$

pour tout β.

Le terme de source $J_{\alpha\mu}A^\mu_\alpha + J_p\varphi_p$ doit être exprimé en fonction de sources indépendantes avant dérivation fonctionnelle.

Inversant la transformation (III.29), il vient :

$$\varphi_p = \frac{-i(\Omega_\ell)_{pq}\lambda_q\chi_\ell}{M_\ell} + \alpha_{pr}\xi_r \tag{21}$$

Nous portons (21) dans le terme de source en retenant uniquement les indices ℓ correspondant aux bosons de jauge massifs $B_{\ell\mu}$ et χ_ℓ nous obtenons

$$J_{\ell\mu}B^\mu_\ell - \frac{iJ_p(\Omega_\ell)_{pq}\lambda_q\chi_\ell}{M_\ell} \tag{22}$$

Nous utilisons maintenant (20) pris à l'ordre zéro des constantes de couplage et pris pour une valeur $\alpha = \ell$; ($\theta_{\beta,pq}\lambda_q$ doit être conservé car il est de l'ordre de la masse des χ_ℓ) :

$$\partial_\mu J^\mu_\ell + i J_p \Omega_{\ell,pq} \lambda_q = 0 \qquad (23)$$

ce qui permet de transformer (22) en

$$(B_{\ell\mu} - \frac{1}{M_\ell} \partial_\mu \chi_\ell) J^\mu_\ell \qquad (24)$$

Cette forme du terme de source exprimée à l'aide des sources indépendantes J^μ_ℓ montre que le champ physique des bosons de jauge massifs est en fait $B_\mu - \frac{1}{M_\ell} \partial_\mu \chi_\ell$. On admettra que ce résultat est conservé à tous les ordres des constantes de couplage. Nous pouvons donc adopter pour cet opérateur dans le schéma d'interaction le développement de Fourier (III.42) de l'opérateur $B_\mu - \frac{1}{M_\ell} \partial_\mu \chi_\ell$ du chapitre précédent, ce qui tient compte également de la condition $B_\ell . n |i> = 0$ sur l'espace de Hilbert des états physiques. La projection de $B_{\ell\mu} - \frac{1}{M_\ell} \partial_\mu \chi_\ell$ sur n^μ donne alors le développement (III.40) pour χ_ℓ, et du fait de la condition $A_s n = 0$ on peut également adopter le développement (III.41) de $\alpha_{s\mu}$ pour $A_{s\mu}$.

3.- REGLES DE FEYNMAN τ-ORDONNEES

Le paragraphe précédent permet de conclure à la grande ressemblance du développement en graphes de Feynman de la matrice S avec le développement en perturbation provenant de la quantification lumière du chapitre III : les opérateurs des champs sont identiques dans le schéma d'interaction, et les vertex V_1 (III.22) correspondent aux vertex $-\mathcal{L}_I(7)$ actuels. Il reste pour démontrer l'équivalence de ces deux théories à interpréter les vertex supplémentaires V_2 (III.23) et à modifier la forme de propagateurs (8-13). Ceci va être accompli en réordonnant les graphes de Feynman obtenus à l'aide des propagateurs (8-13) pris à $\alpha = 0$, et des vertex $-\mathcal{L}_I$ par rapport à la variable $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}^o + \hat{x}^3)$ que nous avons utilisée (nous suivons en cela Kogut et Soper [4]).

a.- Propagateurs des bosons scalaires

Le propagateur des bosons χ (nous omettons l'indice ℓ) s'écrit dans les nouvelles variables x^μ, p^μ ($p_3 = \eta$, $p_o = H$) :

$$\Delta_F^{(\chi)}(x) = -i < T\chi(x)\chi(0) > = (2\pi)^{-4} \int d^4p \exp -ipx.(p^2-M^2+i\epsilon)^{-1}$$

$$= (2\pi)^{-4} \int d^2p_T \int d\eta \exp -i(\eta x^3 - p_T . x_T) \int dH \exp -iH\tau \,.$$

$$(2\eta H - p_T^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1} \qquad (25)$$

Evaluant l'intégrale en H, on obtient

$$\Delta_F^{(\chi)}(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} (\theta(\tau) \exp -ipx + \theta(-\tau) \exp ipx) \qquad (26)$$

avec $p_o = \dfrac{p_T^2 + M^2}{2\eta}$

De la même façon, on aurait obtenu

$$\Delta_F^{(\xi)}(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} (\theta(\tau) \exp -ipx + \theta(\tau) \exp ipx) \qquad (27)$$

avec $p_o = \dfrac{p_T^2 + \mu^2}{2\eta}$

b.- <u>Propagateurs des bosons de jauge</u>

Nous transformons ceux-ci en utilisant la relation

$$- g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu n_\nu + p_\nu n_\mu}{pn} = \sum_{\lambda = \pm 1} e_\lambda(p_\mu e_\lambda(p)_\nu + \frac{p^2}{\eta^2} n_\mu n_\nu \qquad (28)$$

Les polarisations introduites sont les polarisations (III.45)

$$D^{(B)}(x)_{\mu\nu} = -i < TB_\mu(x)B_\nu(0) > = (2\pi)^{-4} \int d^4p \exp -ipx \frac{1}{p^2-M^2+i\epsilon} \times$$

$$\times \left[\sum_{\lambda = \pm 1} e_\mu e_\nu + M^2 \frac{n_\mu n_\nu}{\eta} \right] + (2\pi)^{-4} n_\mu n_\nu \int d^4p \exp ipx \frac{1}{\eta^2} \qquad (29)$$

L'intégration par rapport à $p_o = H$ donne alors

$$D(B)(x)_{\mu\nu} = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{i\eta}{\eta} \left(\sum_{\lambda = \pm 1} e_\lambda(p)_\mu e_\lambda(p)_\nu + M^2 \frac{n_\mu n_\nu}{\eta^2} \right)$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\tau) n_\mu n_\nu \int d^2p_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \exp -i\,(\eta x^3 - p_T x_T) \qquad (30)$$

avec $p_o = \dfrac{p_T^2 + M^2}{2\eta}$

On obtiendrait de même :

$$D^{(A)}(x)_{\mu\nu} = - \frac{i}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \sum_{\lambda=\pm 1} e_\lambda(p)_\mu e_\lambda(p)_\nu$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(\tau) n_\mu n_\nu \int d^2p_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \exp -i(\eta x^3 - p_T x_T) \qquad (31)$$

avec $p_o = \dfrac{p_T^2}{2\eta}$

c.- Propagateurs croisés

$D(x)_\mu = -i \langle T B_\mu(x) \chi(0) \rangle$ devient par les mêmes calculs :

$$D(x)_\mu = - \frac{1}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} M \frac{n_\mu}{\eta} (\theta(\tau) \exp -ipx + \theta(-\tau) \exp ipx) \qquad (32)$$

d.- Propagateurs des fermions

La même méthode donne

$$S_F(x) = \frac{-i}{2(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_o^\infty \frac{d\eta}{\eta} \{\theta(\tau)(p+m) \exp -ipx + \theta(-\tau)(-p+m) \exp ipx\}$$

$$+ \frac{1}{2(2\pi)^3} \delta(\tau) \gamma^o \int d^2p_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp -i(\eta x^3 - p_T . x_T) \qquad (33)$$

Les expressions précédentes de propagateurs permettent maintenant d'ordonner par rapport à τ les règles de Feynman. La contribution

d'un graphe de Feynman attaché aux vertex $\{x_i\}$ à la matrice S sera de la forme

$$\int \prod_i d^4x_i \ldots D_F^{(x)}(x_{n_1} - x_{n_2}) \ldots D_F^{(\xi)}(x_{n_3} - x_{n_4}) \ldots D_F^{(B)}(x_{n_5} - x_{n_6}) \ldots \qquad (34)$$

Un certain nombre de propagateurs liant les vertex x_i interviendra ainsi dans son expression, et en portant leurs décompositions précédentes en $\theta(\tau)$, $\theta(-\tau)$, $\delta(\tau)$ dans (34) nous obtenons une somme de termes correspondant chacun à des vertex ordonnés suivant une séquence des τ_i. L'intégration sur les x_i dans chacun de ces termes va ainsi nous procurer une liste de règles de Feynman τ-ordonnées dans l'espace des impulsions.

4.- EQUIVALENCE DES REGLES DE FEYNMAN τ-ORDONNÉES ET DE LA QUANTIFICATION LUMIERE

Nous allons tout d'abord examiner l'équivalence des théories en ignorant le problème des divergences des intégrales qui apparaissent dans ces théories. Ces divergences nécessitent une régularisation et un processus de soustraction compatibles avec l'invariance de jauge, et nous examinerons ce point dans le chapitre V. A strictement parler, ce qui suit s'appliquera aux graphes en arbre qui ne présentent pas ce problème.

a.- Equivalence formelle

Cette équivalence va découler de l'interprétation des parties en $\delta(\tau)$ des propagateurs. Nous allons montrer que leur effet se traduit par l'addition au Hamiltonien $-\mathcal{L}_I(x) = V_1(x)$ de l'opérateur $V_2(x)$ (III.23).

Considérons tout d'abord l'effet des termes $\delta(\tau)$ des propagateurs des bosons de jauge. Remarquons en premier lieu qu'ils sont indépendants de la masse et par conséquent identiques pour les bosons de jauge massifs ou non ; aussi nous allons prendre la notation commune $A_{\alpha\mu}(x)$ pour les bosons massifs $B_{\ell\mu}(x)$ et les bosons de masse nulle $A_{s\mu}(x)$. L'interprétation de ces termes que nous noterons

(35)

est qu'ils propagent de façon instantanée dans la variable τ une interact (ils sont ainsi analogues au terme instantané de Coulomb). Nous parleron donc de propagation instantanée des bosons de jauge, d'hélicité $\pm$ 1 par référence au cas de masse nulle.

Leur proportionnalité à $n_\mu n_\nu$ leur interdit d'être attaché entre eux pour donner des vertex tels que :

(36)

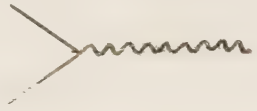
D'autre part la composante A_n ayant été éliminée de la théorie comme nous l'avons vu, on ne peut les contracter qu'à l'impulsion des vertex provenant de $-(A^\mu, A^\nu, \partial_\mu A_\nu)$, notés

(37)

de $-iA^\mu \partial_\mu \varphi \theta \varphi$, notés

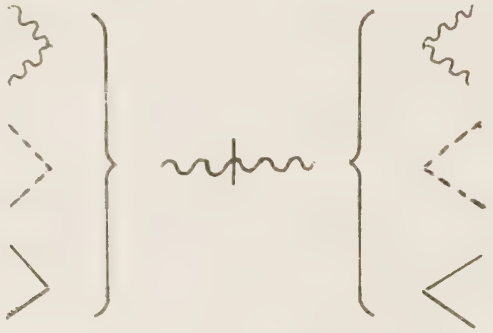
(38)

et au courant de fermions $-\bar{\psi}\, t\, A_\mu \gamma^\mu \psi$, noté



(39)

Les propagateurs instantanés ne participeront donc aux graphes de Feynman que dans les combinaisons



(40)

Nous rappelant la définition de J'^{o} (III.9)

$$J'^{o} = \partial_3 A^\mu \times A_\mu + i\varphi\theta\partial_3\varphi + \bar{\psi}\gamma^o t\psi \quad . \tag{41}$$

la contribution de ces graphes est, $|i\rangle$ et $|f\rangle$ désignant les états entrant et sortant adaptés :

$$v_{21} = \langle f| \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_{(1)} d^4x_{(2)} J'^{o}(x_1) \frac{\delta(x^o(1)-x^o(2))}{(2\pi)^3} \int d^2p_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \times$$

$$\times \exp -i\,[\eta(x^3(1)-x^3(2))-p_T(x_T(1)-x_T(2))]\; J'^{o}(x_2)|i\rangle \quad . \qquad (42)$$

L'intégration sur $d^2p_T d\eta$ donne, avec $\frac{1}{\eta^2}$ défini maintenant par (II.18) :

$$v_{21} = \langle f| -\frac{1}{2} \int d^4x_1 d^4x_2 \; J'^{o}(x_1)\delta^4(x_1-x_2) \frac{1}{\eta^2} J'^{o}(x_2)|i\rangle$$

$$= \langle f| -\frac{1}{2} \int dx^o \int dx^3 d^2x_T \; J'^{o}(x) \frac{1}{\eta^2} J'^{o}(x)|i\rangle$$

$$= -2\pi i \delta(\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_i)\langle f| \int dx^3 d^2x_T \; J'^{o}(x) \frac{1}{2\eta^2} J'^{o}(x)|i\rangle \qquad (43)$$

les opérateurs étant pris à $x^o = 0$. $\mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}_f$ désignent les "énergies" initiales et finales.

Venons-en à présent au terme en $\delta(r)$ du propagateur des fermions, noté

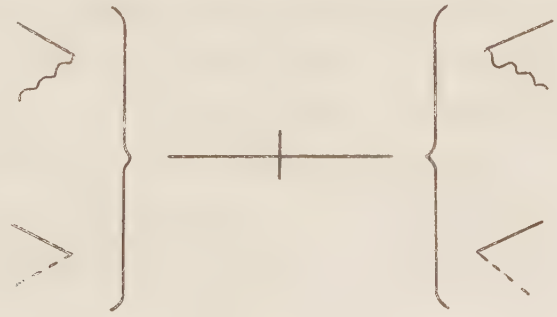
; (44)

comme pour les bosons de jauge, ces termes d'interaction instantanée ne pourront s'attacher entre eux pour donner des vertex :

. (45)

La raison est cette fois leur proportionnalité à γ^o et à l'identité $(\gamma^o)^2 = 0$.

Ils ne pourront s'attacher qu'aux vertex $\bar{\psi}[tA_\mu\gamma^\mu + (\Gamma,\varphi)]\psi$ et entreront dans les graphes de Feynamn suivant les combinaisons



(46)

qui donneront les contributions ($|i\rangle$ et $|f\rangle$ étant les états adaptés)

$$v_{22} = \langle f|(-i)^2 \int d^4x_1 d^4x_2\ \bar{\psi}[tA_\mu\gamma^\mu + (\Gamma,\varphi)](x_1) S_F^I(x_1-x_2)[tA_\mu\gamma^\mu + (\Gamma,\varphi)](x_2)$$

$$\times\ \psi(x_2)|i\rangle \qquad (47)$$

S_F^I étant la partie en $\delta(0)$ de S_F .

Le calcul, effectué comme précédemment, donne

$$v_{22} = -2\pi i\delta(\mathcal{H}_f - \mathcal{H}_i)\langle f| \int dx^3 x_T \sqrt{2}\,\delta^+ \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\partial}_3\ \delta|i\rangle \ . \qquad (48)$$

Nous avons utilisé la notation (17)

$$\delta = \frac{1}{2\eta}\{\gamma^o[-tA_j\gamma^j + (\Gamma,\varphi)]\ \psi_+\} \quad . \qquad (49)$$

Dans la dérivation de (48) on se sert des identités (Ap. II)

$$\hat{\gamma}^o = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma^o+\gamma^3),\ (\gamma^o)^2 = 0,\ \gamma^o\gamma^i = -\gamma^i\gamma^o,\ \gamma^o = \gamma^o P_+ \text{ et } (\gamma^o)^+ = \gamma^3 \ .$$

Les calculs précédents des graphes à deux vertex v_{21} et v_{22} montrent que leur contribution aux graphes de Feynman τ-ordonnés est équivalente à l'addition d'un terme d'interaction V_2 au Hamiltonien $V_1 = -\mathcal{L}_I$. On constate aisément que ce résultat persiste lorsque les combinaisons (40) et (46) apparaissent à l'intérieur de graphes quelconques. (On a à résoudre le même problème de combinatoire que dans le cas de l'interaction instantanée de Coulomb. Voir par exemple sur ce point : Bjorken and Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw Hill, ch. 17.9).

Ajoutant les vertex supplémentaires V_1 au Hamiltonien, il nous suffit à présent de considérer dans les propagateurs les contributions $\theta(\tau)$ et $\theta(-\tau)$. Dans la contribution (35) d'un graphe, l'intégration sur les $dx_i^3 dx_{iT}$ fournit la conservation en chaque vertex du flux des p^3 et p_T , comme on l'obtient dans le cas de la quantification lumière ; il reste alors les intégrations sur les τ_i . En traitant quelques exemples du type du diagramme (III.1) on se convainc facilement qu'elles laissent après un changement de variable des intégrales

$$\int d(\tau_{i_2}-\tau_{i_1})\theta(\tau_{i_2}-\tau_{i_1})\exp i(\tau_{i_2}-\tau_{i_1})(\mathcal{H}_f-\mathcal{H}_{i_1}) = \frac{i}{\mathcal{H}_f-\mathcal{H}_{i_1}+i\varepsilon} \qquad (50)$$

procurant ainsi les propagateurs du développement (III.49).

($\mathcal{K}_{i_1}$ représente le flux d'énergie arrivant au vertex i_1), ainsi qu'un facteur total $2\pi\delta(\mathcal{K}_f - \mathcal{K}_i)$. La comparaison des expressions (30) et (57) d'une part, et de (32) et (60) nous assure bien que les propagateurs viennent avec les bons facteurs, dans le cas des bosons de jauge et du propagateur croisé $B_{e\mu}, \chi_e$. Le cas des fermions ne pose pas de problème.

Il resterait à montrer que les divers facteurs i et 2π ainsi que les signes que nous avons négligés dans ce chapitre se combinent bien entre eux afin de donner l'équivalence entre les règles de Feynman τ-ordonnées et le formalisme de quantification lumière. On le vérifie facilement sur quelques cas simples ; cependant la généralité du Lagrangien choisi rend fastidieuse cette démonstration en toute généralité. Au lieu de cela nous terminerons ce chapitre en résumant brièvement une méthode différente de calcul de la matrice S dans le formalisme de quantification lumière qui montrera bien cette équivalence.

b.- Méthode de Tung-Mow Yan [13]

Nous nous reportons maintenant au début du chapitre précédent où nous avions donné le développement de la matrice $S = U$ ($\tau = +\infty$, $\tau = -\infty$) correspondant au Hamiltonien $H_o + V_1 + V_2$, en utilisant la vieille méthode des perturbations. Au lieu de cela, nous allons utiliser la formule de Dyson "τ ordonnée"

$$S = U(\tau = +\infty, \tau = -\infty) = T^{\tau} \exp -i \int_{-\infty}^{+\infty} d^4x (V_1(x) + V_2(x)) \qquad (51)$$

T^{τ} représente la mise en ordre par rapport à τ des opérateurs sur lesquels il agit.

Cependant une difficulté surgit dans l'application de cette formule car les champs $a_\mu(x)$ et $\psi'(x)$ qui figurent dans V_1 et V_2 ne sont pas tous indépendants, $a^3(x)$ et $\psi'^-(x)$ dépendant des $a_i(x)$, $\psi'^+(x)$ et $\varphi(x)$. L'ordre par rapport à τ entre ces opérateurs n'a donc rien d'évident lorsque l'on fait de développement de l'exponentielle. Il nous faut l'équivalent du théorème de Wick pour ce développement, et donc la notion de contraction entre les champs.

T. M. Yan [13] résoud ce problème par une méthode fonctionnelle : on couple les champs de la théorie à des sources η, K_μ, K en ajoutant au

Lagrangien le terme de source (nous sous-entendons la sommation sur les indices n, α et p)

$$\bar{\psi}'\eta + \bar{\eta}\psi' + K_\mu \mathcal{A}_\mu + K\varphi \quad . \tag{52}$$

Supposons que nous voulions calculer le propagateur des ψ'. Du fait de leur dépendance, ce n'est pas simplement

$$<0|T^\tau \psi'(x)\bar{\psi}'(y)|0> \tag{53}$$

mais

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)} \frac{\delta}{\delta\eta(x)} < 0 \text{ out } |0 \text{ in} >_{\eta=0} \tag{54}$$

que l'on obtient, $<0 \text{ out } |0 \text{ in}>_\eta$ correspondant au Lagrangien

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}'(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi' + \bar{\psi}'\eta + \bar{\eta}\psi' \quad . \tag{55}$$

Comme ψ' dépend de η par l'intermédiaire de ψ'_- , ainsi que le montrent les équations du mouvement, il faudra faire avec soin la deuxième dérivation fonctionelle. Sans entrer dans les détails, donnons le résultat :

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(y)} \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)} <0 \text{ out } | \text{ 0 in}>_{\eta=0} = i S_F(x-y) - \frac{1}{4} \gamma^o \varepsilon(x^3-y^3)\delta(x^o-y^o)$$

$$\times \delta^2(x_T - y_T) \quad . \tag{56}$$

Le terme supplémentaire $-\frac{1}{4}\gamma^o\varepsilon(x^3-y^3)\delta(x^o-y^o)\delta^2(x_T-y_T)$ s'écrit également

$$\frac{-i}{2(2\pi)^3} \delta(\tau)\gamma^o \int d^2p_T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta} \exp - i(\eta x^3 - p_T \cdot x_T) \tag{57}$$

et en comparant avec l'expression (33) de $S_F(x)$ nous voyons que son rôle est d'ôter de $S_F(x)$ la partie en $\delta(\tau)$ de propagation instantanée.

On pourrait vérifier pareillement dans le calcul du propagateur des bosons de jauge qu'un terme supplémentaire en $\delta(\tau)$ apparaît qui annule la dépendance en $\delta(\tau)$ de $D_F(x)_{\mu\nu}$ des formules (30) et (31).

Concluons maintenant à la lumière de cette discussion : nous avons imposé au départ la condition $A^0 = 0$ dans la méthode de quantification lumière, et cette condition a imposé des relations entre les champs de la théorie, ψ^- et A^3 dépendant maintenant des autres champs. Mais par cela même nous avons dû ajouter au Hamiltonien d'interaction attendu $-\mathcal{L}_I$ un terme supplémentaire V_2. Simultanément cette dépendance a entraîné une modification des propagateurs apparaissant dans le développement de la formule de Dyson, supprimant leur partie proportionnelle à $\delta(\tau)$; mais nous avons justement vérifié au début de ce chapitre l'équivalence entre le terme V_2 et les parties $\delta(\tau)$ des propagateurs ; ils se contrebalancent donc pour redonner la théorie des perturbations "à la Feynman" τ-ordonnée du chapitre VI, et cela assure en définitive le bien-fondé de la quantification lumière effectuée, sous réserve du problème des divergences que nous allons maintenant considérer.

***

APPENDICE

Nous allons vérifier dans cet Appendice l'équivalence des jauges unitaire et lumière sur un exemple en calculant la contribution de Z au moment magnétique anormal de l'électron dans le modèle de Weinberg [24]. Nous utilisons dans cet Appendice la régularisation en dimension introduite dans le chapitre suivant.

Dans ce modèle l'électron est couplé à un boson de jauge massif neutre (dénommé Z) :

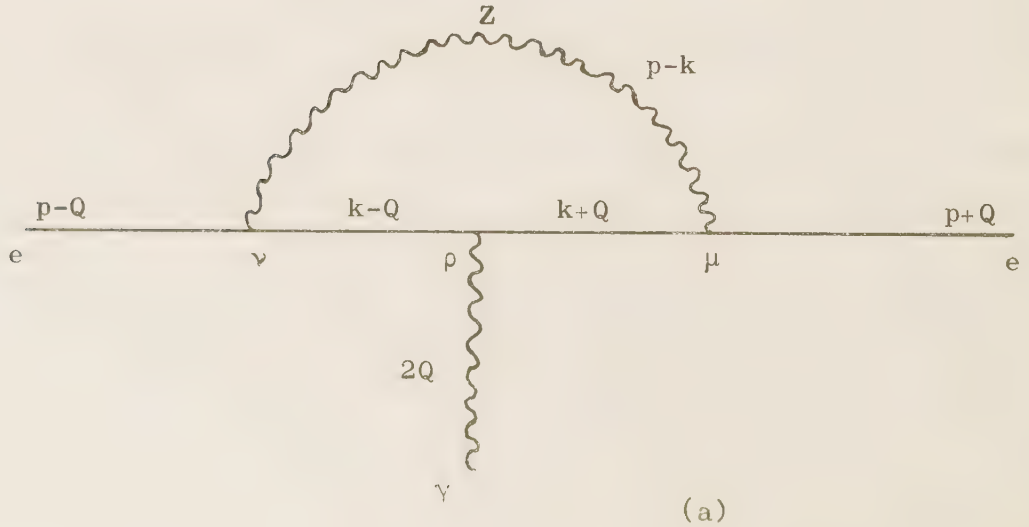
$$H_I = -\bar{e}\gamma^\mu Z_\mu [h_1(1-\gamma_5) + h_2(1+\gamma_5)]e \qquad (A1)$$

avec

$$h_1 = \frac{1}{2}\frac{g'^2}{(g^2+g'^2)^{1/2}} \quad \text{et} \quad h_2 = \frac{1}{4}\frac{g'^2-g^2}{(g^2+g'^2)^{1/2}} \qquad (A1')$$

g et g' sont les deux constantes correspondant à l'invariance de jauge par $SU2 \times U(1)$ du modèle.

Dans la jauge unitaire la seule contribution au moment magnétique anormal vient du graphe (a)



(a)

Le propagateur du boson Z (de masse M_Z, mais nous supprimons pour l'instant l'indice Z) est :

$$-i\left[g_{\mu\nu}-\frac{(p-k)_\mu(p-k)_\nu}{M^2}\right] \quad . \tag{A2}$$

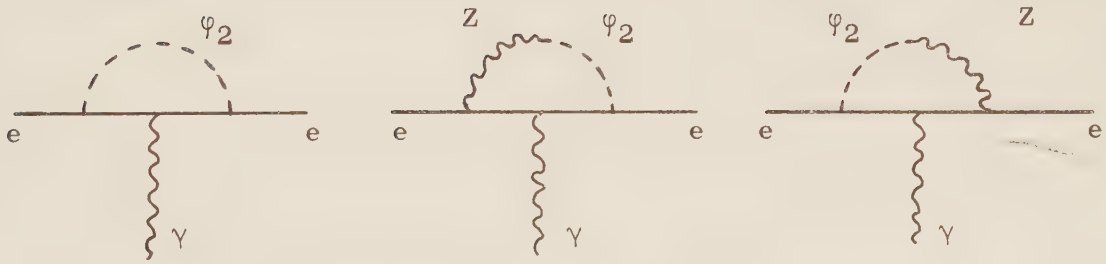
Ce qui donne pour le graphe (a)

$$(-i)^3\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\gamma^\nu[h_1(1-\gamma_5)+h_2(1+\gamma_5)]i(\not K+\not Q+m)e\gamma^\rho i(\not K+\not Q+m)\gamma^\mu[h_1(1-\gamma_5)+h_2(1+\gamma_5)]$$
$$-i\left[g_{\mu\nu}-\frac{(p-k)_\mu(p-k)_\nu}{M^2}\right]\frac{1}{[(k-Q)^2-m^2][(k+Q)^2-m^2][(p-k)^2-M^2]} \quad . \tag{A3}$$

La contribution de (A3) au moment magnétique anormal a été calculée par Bardeen et al. [26] :

$$h_Z=-\frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{3}\left(\frac{m}{M_Z}\right)^2+\frac{Gm^2}{8\pi^2\sqrt{2}}\frac{4}{3}\left(1-2\,\frac{M_W^2}{M_Z^2}\right) . \tag{A4}$$

Dans la jauge du cône de lumière nous avons, outre le graphe (a), des contributions venant des graphes (b), (c), (c')



(b) (c) (c')

Ces graphes proviennent de l'interaction avec l'électron du boson scalaire φ_2 qui tient le rôle d'un degré de liberté du boson de jauge Z :

$$H_I = i \frac{G_e}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma_5 e \varphi_2 \quad . \tag{A5}$$

Les propagateurs dans la jauge du cône de lumière sont :

$$Z \sim\sim\sim \quad -i \frac{g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu n^\nu + p^\nu n^\mu}{pn}}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

$$\varphi_2 \text{ ·----· } \quad \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \tag{A6}$$

$$Z\varphi_2 \sim\sim\sim\text{·----·} \quad \frac{M}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} \frac{n^\mu}{pn} \quad .$$

Graphe a. Il donne maintenant au lieu de (A3) :

$$(-i)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \gamma^\nu [h_1(1-\gamma_5)+h_2(1+\gamma_5)] i(\not{k}-\not{Q}+m) e\gamma^\rho i(\not{k}+\not{Q}+m)\gamma^\mu [h_1(1-\gamma_5)+h_2(1+\gamma_5)]$$

$$- i \left[g_{\mu\nu} - \frac{(p-k)_\mu n_\nu + (p-k)_\nu n_\mu}{p_3 - k_3} \right] \frac{1}{[(k-Q^2)-m^2][(k+Q)^2-m^2][(p-k)^2-M^2]} \quad . \tag{A7}$$

Nous nous placerons éventuellement dans les calculs qui suivront dans un système de référence $Q_{o_2} = Q_3 = 0$ afin de simplifier les calculs (ce qui est possible puisque $Q^2 < 0$), et ferons tendre Q^2, ou Q_T^2, vers zéro.

Le moment magnétique anormal est alors, rappelons-le, le coefficient de $\frac{\sigma_{\mu\rho} Q^\mu}{m}$ dans (A7).

Gardant le premier terme du développement en Q du dénominateur

$$\frac{1}{(k - Q^2) - m^2} \frac{1}{(k+Q)^2 - m^2} = \frac{1}{(k^2 - m^2)^2} + \cdots$$

le dénominateur se met sous la forme en introduisant un paramètre x habituel :

$$\frac{1}{(k-m^2)^2[(p-k)^2-M^2]} = \int_0^1 dx \frac{2x}{[(k-(1-x)p)^2-(1-x)^2p^2 + (p^2-M^2)(1-x)-m^2x]^3} \quad . \tag{A8}$$

Faisant le changement de variable $k' = k - (1-x)p$, et tenant compte du fait qu'à la limite $Q^2 = 0$, $p^2 = m^2$, (A8) s'écrit

$$\int_0^1 dx \frac{2x}{[k'^2 - x^2m^2 - (1-x)M^2]^3} \tag{A9}$$

nous devons maintenant extraire du numérateur :

$$\gamma^\nu[h_1(1-\gamma_5)+h_2(1+\gamma_5)](\not{K}-\not{Q}+m)\gamma^\rho(\not{K}+\not{Q}+m)\gamma^\mu[h_1(1-\gamma_5)+(1+\gamma_5)] \times\left[g_{\mu\nu} - \frac{(p-k)_\mu n_\nu + (p-k)_\nu n_\mu}{p_3 - k_3}\right] \tag{A10}$$

les termes en $\sigma^{\mu\rho}Q_\mu$. Un calcul attentif montre que

la partie $g^{\mu\nu}$ de (A10) donne la contribution covariante

$$-16e(h_1^2 + h_2^2)(1-x)(2-x)m\,\sigma^{\mu\rho}Q_\mu \tag{A11}$$

plus des termes multipliés par 4-n qui s'annulent pour n = 4.

La partie en $(p-k)_\mu n_\nu + (p-k)_\nu n_\mu$ de (A10) donne par contre la contribution apparemment non covariante :

$$8[k_3' + (1-x)p_3]emx\{-(h_1^2 + h_2^2)(3-2x) + 2h_1h_2\}\sigma^{\mu\rho}Q_\mu \quad . \tag{A12}$$

L'utilisation de la formule de prolongement [21]

$$\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - L + i\varepsilon)^\alpha} = \frac{i(-1)^\alpha}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{\Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{L^{\alpha - \frac{n}{2}}} \tag{A13}$$

permet de calculer la contribution de (A11) au moment magnétique. Le résultat est fini et donne pour n = 4

$$-i\frac{1}{(3\pi)^2} e \frac{m_e}{M^2} (h_1^2 + h_2^2)\,\sigma^{\mu\rho}Q_\mu \quad . \tag{A14}$$

(A12) donne, à un facteur près, à calculer dans (A7) :

$$\int \frac{d^nk'}{(2\pi)^n} \frac{k_3' + (1-x)p_3}{xp_3 - k_3'} \frac{1}{[k'^2 - x^2m^2 - (1-x)M^2]^3} \quad . \tag{A15}$$

On utilise alors (V.15) qui donne

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2 - L)^\alpha} \frac{1}{(p_3 - k_3)} = \frac{i(-1)^\alpha}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{1}{p_3} \frac{1}{L^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \qquad (A16)$$

et (A13) pour intégrer (A15). Le résultat est fini pour $n = 4$ et l'on obtient (nous négligeons m^2 devant M^2) la quantité covariante :

$$\frac{-i}{2^5 \pi^2} \frac{1}{x} \frac{1}{M^2} \quad . \qquad (A17)$$

La contribution au moment magnétique anormal correspondant à (A12) est ainsi, après intégration sur x :

$$\frac{m_e e}{\pi^2 M^2} \left\{ \frac{5}{12} (h_1^2 + h_2^2) - \frac{1}{2} h_1 h_2 \right\} \sigma^{\mu\rho} Q_\mu \quad . \qquad (A18)$$

Graphe b. Ce graphe donne

$$(-i)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{-i}{2} G_e \gamma_5 \frac{i(\not{k} - \not{Q} + m)}{(k-Q)^2 - m^2} e\gamma^\rho \frac{i(\not{k} + \not{Q} + m)}{(k+Q)^2 - m^2} \frac{-i}{\sqrt{2}} G_e \gamma_5 \frac{i}{(p-k)^2 - M^2} \quad . (A19)$$

Nous n'insisterons pas sur le calcul de ce graphe, car du fait que G_e^2 est proportionnel à m^2, ce graphe est en $\frac{m^2}{M^2}$ par rapport aux autres graphes (comme on le vérifie par le calcul), et sa contribution est donc négligeable.

Graphes c et c'. Le graphe c donne la contribution

$$(-i)^3 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} (-1)\gamma^\nu [h_1(1-\gamma_5) + h_2(1+\gamma_5)] \frac{i(\not{k} - \not{Q} + m)}{(k-Q)^2 - m^2} e\gamma^\rho \frac{i(\not{k} + \not{Q} + m)}{(k+Q)^2 - m^2} \frac{-i}{\sqrt{2}} G_e \gamma_5$$
$$\frac{1}{(p-k)^2 - M^2} \frac{Mn_\nu}{p_3 - k_3} \quad . \qquad (A20)$$

Le dénominateur se traite de la même façon que pour le graphe a. Du numérateur on extrait (les calculs sont simplifiés en prenant le cas $\rho = 0$) :

$$2(h_1 - h_2) k_3 x\gamma^\rho \not{Q} \quad . \qquad (A21)$$

Le graphe c' se déduit du graphe c par lecture en sens inverse et changement de Q en -Q. Son numérateur donne ainsi

$$-2(h_1 - h_2)k_3 \times \not{Q}\gamma^\rho \quad . \tag{A22}$$

La somme (A21) + (A22) est

$$4(h_2 - h_1) \times k_3 \, \sigma^{\mu\rho} Q_\mu \quad . \tag{A23}$$

Soit à calculer

$$M \frac{G_e}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{k_3}{p_3 - k_3} \frac{2x^2}{[k'^2 - x^2 m^2 - (1-x)M^2]} 4(h_2 - h_1)\sigma^{\mu\rho} Q_\mu \tag{A24}$$

avec, rappelons-le, $k' = k - (1-x)p$.
L'intégration s'effectue à l'aide de (A13) et (A16), et donne pour $n = 4$ le résultat fini et covariant (après intégration sur x) :

$$-e \frac{G_e}{\sqrt{2}} \frac{1}{M} \frac{1}{8\pi^2} (h_2 - h_1)\sigma^{\mu\rho} Q_\mu \quad . \tag{A25}$$

Nous pouvons maintenant additionner (A11), (A18) et (A25) afin d'obtenir le moment magnétique anormal χ_Z . Les constantes h_1 et h_2 s'expriment en fonction de quantités plus physiques par les relations (A1'), jointes aux relations qui déciulent du modèle de Weinberg

$$\frac{G_W}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\lambda^2} \; ; \; M_W = \frac{1}{2} \lambda g \; ; \; M_Z = \frac{1}{2} \lambda (g^2 + g'^2)^{1/2} \; ;$$

$$e = \frac{gg'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \; ; \; G_e = 2^{1/4} m \, G_W^{1/2} \quad . \tag{A26}$$

On obtient ainsi :

$$h_1^2 + h_2^2 = \frac{1}{2} \frac{G_W}{\sqrt{2}} [5M_Z^2 - 4M_W^2] - \frac{e^2}{2}$$

$$h_1 \, h_2 = \frac{G_W}{\sqrt{2}} [M_Z^2 - M_W^2] - \frac{e^2}{4} \tag{A27}$$

$$\frac{G_e}{M} (h_1 - h_2) = \frac{G_W}{\sqrt{2}} m \quad .$$

Le résultat final est

$$k_Z = \frac{m^2}{\pi^2}\frac{G_\mu}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\frac{M_W^2}{M_Z^2}\right)-\frac{e^2}{12\pi^2}\left(\frac{m}{M_Z}\right)^2 \qquad \text{(A28)}$$

en accord avec (A4).

* * *

CHAPITRE V

REGULARISATION ET EQUIVALENCE DES THEORIES

1.- INTRODUCTION

Les développements des chapitres III et IV sont en grande partie formels du fait des divergences des intégrales apparaissant dans la théorie des perturbations à la Heitler (III.48) ou à la Dyson (IV.50). Ces divergences peuvent être tout d'abord du type infra-rouge et sont liées aux masses nulles des bosons de jauges $A_{\ell\mu}$ correspondant à l'invariance de jauge restante après application du mécanisme de Higgs-Kibble, donc aux générateurs o_ℓ de H laissant invariant les $\{\lambda_p\}$ (III.4). Ces divergences posent un problème ardu, non résolu sauf dans le cas d'un sous-groupe H abélien, correspondant à l'invariance de jauge de l'électrodynamique quantique, $A_{\ell\mu}$ devenant le champ du photon. Nous supposerons donc implicitement nous situer dans un tel cas, le seul en fait intéressant puisque le photon est le seul boson vectoriel de masse nulle que l'on souhaite introduire dans un modèle du monde physique.

Restent les divergences ultraviolettes des théories Yang-Mills. Ces théories étant unanimement considérées comme renormalisables, de telles divergences peuvent être soustraites dans une jauge renormalisable de façon compatible avec l'invariance de jauge [17, 18, 19]. Mais la démonstration précédente de l'équivalence des règles de Feynamn τ-ordonnées avec le développement (III.48) ou avec le développement à la Dyson de (51) a ignoré le problème des infinis et nous avons montré en fait cette équivalence pour les graphes en arbre.

Afin d'aller plus loin, nous devons tout d'abord régulariser les diverses intégrales des théories de perturbation à la Heitler ou à la Dyson. Remarquons que la quantification sur le cône de lumière fait apparaître de nouvelles singularités en $\delta(\tau)$; les propagateurs apparaissant dans le développement de la formule de Dyson (IV.51) sont pour les fermions et les bosons de jauge :

$$i S_F^{\tau}(x-y) = i S_F(x-y) - \frac{1}{4}\gamma^o \delta(x^o - y^o)\varepsilon(x^3 - y^3)\delta^2(x_T - y_T) \quad (1)$$

$$i D_{\mu\nu}^{(A,B),\tau}(x-y) = i D_{\mu\nu}^{(A,B)}(x-y) + n_\mu n_\nu \frac{i}{2}\delta(x^o - y^o)\,|x^3 - y^3|\,\delta^2(x_T - y_T) \quad . \quad (2)$$

Or l'équivalence cherchée repose essentiellement sur la régularisation de ces termes en $\delta(\tau)$ qui doivent compenser les vertex V_2 (III.23

A titre d'exemple, nous allons considérer une méthode habituelle de régularisation pour un graphe de self-masse d'un fermion dû à un champ scalaire [20] :

On remplace dans le Lagrangien les champs scalaires φ_p par $\sum_i a_i^{(p)} \varphi_{pi}$, les champs φ_{pi} ayant les masses μ_{pi} , avec les conditions :

$$\sum_i (a_i^{(p)})^2 = \sum_i (a_i^{(p)})^2 \mu_{pi}^2 = 0 \quad . \quad (3)$$

V_1 donne dans ce cas la contribution

$$\langle p',s'| - \int d^4x d^4y \bar{\psi}'(x) \Gamma S_F^\tau(x-y) \Gamma [D_F^\tau(y-x)]_R \psi(y) |p,s\rangle \quad (4)$$

avec

$$[D_F^\tau(y-x)]_R = \sum_i a_i^2 D_F^\tau(y-x\,;\mu_i) \quad . \quad (5)$$

(Il suffit ici de renormaliser le propagateur des scalaires).
V_2 donne la contribution

$$\langle p',s'| \frac{\sqrt{2}}{2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2\eta} [(\Gamma,\varphi)\gamma^o \psi] \right\}^+ (\Gamma,\varphi)\gamma^o \psi |p,s\rangle \quad . \quad (6)$$

Isolant alors la contribution $\delta(\tau)$ de S_F^τ dans (4), on montrerait qu'elle compense exactement (6).

Cependant, une telle régularisation n'est pas invariante de jauge. D'autre part, comme l'ont remarqué Bouchiat et al. [20], la compensation entre (4) et (6) dépend de la régularisation adoptée : un calcul simple montre que les parties instantanées de (4) et (6) ne diffèrent que par la valeur moyenne sur le vide des produits des champs scalaires qui viennent dans (4) sous la forme

$$\sum_i a_i^2 \langle 0|T[\varphi_i(x^o,x_T,y^3),\varphi_i(x^o,x_T,x^3)]|0\rangle \qquad (7)$$

et dans (6) sous la forme

$$-\sum_i a_i^2 \langle 0|\varphi_i(x^o,x_T,y^3)\varphi_i(x^o,x_T,x^3)|0\rangle \qquad (8)$$

et c'est la propriété

$$[D_F(0,x^3)]_R = [D^{(-)}(0,x^3)]_R = \frac{i}{8\pi^2}\sum_i a_i^2\mu_i^2 \operatorname{Log}\mu_i \qquad (9)$$

qui entraîne l'égalité au signe près de (6) avec la partie en $\delta(\tau)$ de (4), et ainsi leur compensation.

Il existe heureusement une régularisation invariante de jauge, introduite récemment par 't Hooft et Veltman [21], qui va permettre de résoudre notre problème.

2.- REGULARISATION

La méthode de 't Hooft et Veltman consiste à prolonger les intégrales de la série des perturbations de la matrice S dans le plan complexe n, n étant le nombre de dimensions d'espace-temps.

Les infinis apparaissent alors comme des pôles en $n=4$ dans le prolongement de ces intégrales, et peuvent être soustraits de façon invariante de jauge.

Ce prolongement est obtenu en utilisant des expressions telles que (ici pour une métrique euclidienne) :

$$\int d^n p \frac{1}{(p^2+2kp+m^2+i\varepsilon)^\alpha} = \frac{\pi^{n/2}}{(m^2-k^2)^{\alpha-\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha-\frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \qquad (10)$$

n étant un entier. Pour n quelconque on adopte alors le prolongement donné par le second membre de (10).

(On passerait à la métrique de Poincaré par une rotation dans le plan complexe des impulsions).

Notre cas nous aurons à calculer des intégrales de la forme :

$$\int \frac{d^r}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 - L)^\alpha} \frac{1}{(k_3 - p_3)^\beta} \quad . \tag{11}$$

Ces intégrales se calculent aisément en écrivant

$$d^n p = dp_o \, dp_3 \, d^{n-2} p_\perp \quad .$$

L'intégration suivant $d^{n-2}p_T$ s'effectue en utilisant (10) et l'intégration suivant $dp_o dp_3$ en utilisant l'identité :

$$\iint \frac{dx\, dy}{(xy - c \pm i\varepsilon)^a (x+\lambda)^b} = - \frac{1}{a-1} \frac{\pm 2\pi i}{(-c)^{a-1} \lambda^b} \tag{12}$$

que l'on peut obtenir par exemple à partir de l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(xy - c \pm i\varepsilon)^a} = \frac{(-1)^{a-2}}{a-1} \frac{1}{c^{a-1}} (\pm 2\pi i)\, \delta(x) \tag{13}$$

obtenue par dérivation de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(xy - c \pm ie)^2} = \pm 2\pi i \frac{1}{c} \delta(x) \quad . \tag{14}$$

Le résultat est

$$\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p^2 - L)^\alpha} \frac{1}{(k_3 - p_3)^\beta} = \frac{i(-1)^\alpha}{(2\sqrt{\pi})^n} \frac{1}{k_3^\beta} \frac{1}{L^{\alpha - \frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{n}{2})}{\Gamma(\alpha)} \quad . \tag{15}$$

Nous allons pouvoir maintenant réexaminer le cas des graphes de masse propre et montrer l'équivalence des théories pour ceux-ci de façon rigoureuse. Cela va nous permettre également de définir les termes V_2 (III.23) d'une façon légèrement différente que précédemment qui permettra la démonstration de cette équivalence.

3.- GRAPHES DE MASSE PROPRE : METHODE COVARIANTE

Afin d'appliquer la régularisation précédente à la démonstration de l'équivalence des théories sur le cône de lumière et fonctionnelle, nous allons examiner en détail le cas d'un graphe de masse propre, ce qui va nous amener à préciser la définition de la partie V_2 de

Hamiltonien (III.23). Nous nous intéressons (afin de simplifier l'écriture) à une interaction

$$V_1 = g\bar{\psi}\gamma_5\psi\varphi \tag{16}$$

à laquelle correspond un terme "instantané" dans le Hamiltonien :

$$V_2 = \sqrt{2}\ \delta^+ \frac{i}{2}\overleftrightarrow{\partial}_3\ \delta \tag{17}$$

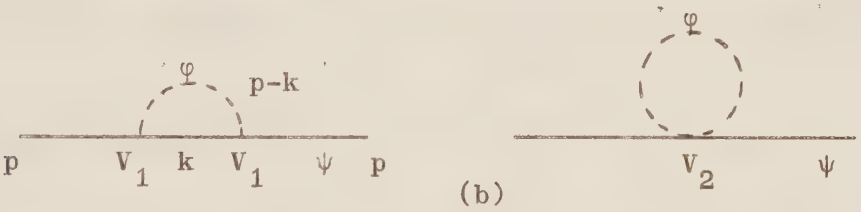
avec

$$\delta = \frac{1}{2\eta}\ g\{\gamma^o\gamma_5\varphi\psi\} \tag{18}$$

soit

$$V_2 = \frac{ig^2}{4}\int d\xi\,\varepsilon(x^3-\xi)\bar{\psi}(x^o,x_T,\xi)\gamma_5\varphi(x^o,x_T,\xi)\gamma^o\gamma_5\psi(x)\varphi(x) \quad . \tag{19}$$

A l'ordre g^2 les graphes qui nous intéressent sont :



Dans le formalisme "à la Dyson" sur le cône de lumière la contribution du graphe (a) est

$$-g^2\int d^4x\,d^4y\,\bar{\psi}(x)\gamma_5 i\bar{S}_F(x-y)\gamma_5\psi(y)i\Delta_F(x-y) \tag{20}$$

avec (IV.56)

$$i\bar{S}_F(x-y) = iS_F(x-y) - \frac{1}{4}\gamma^o\varepsilon(x^3-y^3)\delta(x^o-y^o)\delta^2(x_T-y_T) \quad . \tag{21}$$

La contribution du graphe (b) est

$$\langle f|-i\int d^4x\,d\xi\ \frac{i}{4}\ g^2\varepsilon(x^3-\xi)\bar{\psi}(x^o,x_T,\xi)\gamma_5\varphi(x^o,x_T,\xi)\gamma^o\gamma_5\psi(x)\varphi(x)|i\rangle \tag{22}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$- g^2 \int d^4x d^4y \bar{\psi}(x) \gamma_5 \left\{ \frac{1}{4} \gamma^o \varepsilon(x^3-y^3) \delta(x^o-y^o) \delta^2(x_T-y_T) \right\} \gamma_5 \psi(y) \times$$

$$\times \langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle \quad . \tag{23}$$

(23) est très proche de la partie en $\delta(x^o-y^o)$ de (20), mais un peu de réflexion montre qu'il ne peut y avoir compensation entre (23) et cette partie en $\delta(x^o-y^o)$ dans le cas de la régularisation en dimensions de 't Hooft-Veltman : $\langle 0 | \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$ et $i\Delta_F(x-y)$ pris en transformée de Fourier conduiront à des prolongations analytiques différentes.

La seule possibilité qui nous reste est donc de modifier V_2 (19) en l'écrivant sous la forme

$$V_2(x) = \frac{ig^2}{4} \int d^4y \varepsilon(x^3-y^3) \delta(x^o-y^o) \delta^2(x_T-y_T) \bar{\psi}(y) \gamma_5 \varphi(y) \times$$

$$\times \gamma^o \gamma_5 \psi(x) \varphi(x) \quad . \tag{24}$$

L'application de la formule de Dyson (IV.51) conduit alors à appliquer l'opérateur T^τ d'ordre par rapport à τ <u>avant</u> l'intégration suivant y^o et conduit ainsi à remplacer (23) par $\langle 0 | T^\tau \varphi(x) \varphi(y) | 0 \rangle$.

Tout ceci n'est évidemment que purement formel tant que nous ne passons pas dans l'espace des impulsions et prolongeons les expressions dans la dimension n complexe au moyen des formules (10) et (15).

Nous sous-entendrons donc dorénavant que dans les expressions apparaissant dans V_2 (III.23) on introduit une intégration supplémentaire (formelle) par l'introduction d'une fonction $\delta(x^o-y^o)$ qui permet d'ordonner par rapport à τ dans la formule de Dyson (IV.51) l'interaction V_2. (On peut voir dans ce contexte la réf. [23], où Chang et Yan appliquent ce procédé formel).

Transformant dans l'espace des impulsions les contributions des graphes (a) et (b), on obtient respectivement

$$g^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\varepsilon} \gamma_5 \left\{ \frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon} - \frac{\gamma^o}{2k_3} \right\} \gamma_5 \tag{25}$$

et

$$g^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\varepsilon} \gamma_5 \frac{\gamma^o}{2k_3} \gamma_5 \quad . \tag{26}$$

L'utilisation des formules (10) et (15) permet de donner un sens précis aux expressions (25) et (26) et met en évidence la disparition des termes en $\frac{\gamma^o}{k_3}$ (transformés de Fourier des termes en $\delta(x^o-y^o)$), (nous mènerons les calculs en détail dans le cas intéressant d'un moment magnétique anormal dans le paragraphe 5) lorsque l'on somme les graphes (a) et (b). Il reste

$$g^2 \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\varepsilon} \gamma_5 \frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon} \gamma_5 \tag{27}$$

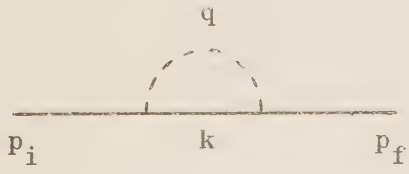
qui n'est autre que la contribution en g^2 à la masse propre obtenue par la méthode fonctionnelle.

Les autres graphes de masse propre des diverses particules des théories de Yang-Mills se traiteraient de façon entièrement similaire.

4.- EQUIVALENCE AVEC LA METHODE NON-COVARIANTE

Nous avons précisé dans le paragraphe précédent le rôle de l'interaction V_2 dans une théorie des perturbations "à la Dyson" sur le cône de lumière, et montré ainsi l'équivalence avec la méthode fonctionnelle pour les graphes de masse propre. Une alternative cependant aurait été de calculer les graphes (a) et (b) par la méthode non-covariante de la théorie des perturbations "à la Heitler" (III.47). Nous ne doutons pas que ces méthodes soient équivalentes, mais il nous semble cependant instructif de vérifier cette équivalence et de voir la façon dont elle apparaît, qui est en fait dissimulée et demande une manipulation non triviale des expressions régularisées.

Examinons la contribution du graphe (a) dans ce formalisme. Nous notons les impulsions ainsi :



et utilisons pour la brièvet' la notation $\vec{p} = (p_T , p^3)$.

Nous obtenons (il est commode d'utiliser l'équivalent des règles de Kogut et Soper [4] que l'on déduit de III.47) :

$$-2\pi i\,\delta(\mathcal{H}_f-\mathcal{H}_i)\bar{u}(pf)\int d^2q_T d^2k_T \int_0^\infty \frac{dq_3}{q_3}\frac{dk_3}{k_3}\, g^2(4\pi)^{-3}\delta^3(\vec{q}+\vec{k}-\vec{p}_i)\gamma_5(\not{k}+m)\gamma_5$$

$$\delta^3(\vec{p}_f-\vec{q}-\vec{k})u(p_i)\,\frac{1}{\mathcal{H}_f-q_o-k_o+i\varepsilon} \qquad (28)$$

avec

$$k_o = \frac{k_T^2+m^2}{2k_3}$$

$$q_o = \frac{(p_T-k_T)^2+\mu^2}{2(p_3-k_3)}$$

et $$\vec{q} = \vec{p} - \vec{k} \quad .$$

Effectuant l'intégration suivant q_T et q_3, et retirant le facteur habituel $(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)$, il vient

$$-\frac{i}{8(2\pi)^6}\, g^2 \int d^2k_T \int_0^{p_3} \frac{dk_3}{k_3 q_3}\,\frac{\gamma_5(\not{k}+m)\gamma_5}{p_o-q_o-k_o+i\varepsilon} \quad . \qquad (29)$$

Il faut tenir compte dans (29) de la normalisation des états ; (III.44) montre que :

$$\psi(x)|p,s\rangle = [2(2\pi)^3]^{-\frac{1}{2}} u(p,s)\exp -ipx \qquad (30)$$

et la comparaison avec le cas covariant du paragraphe précédent impose que l'on multiplie (29) par $2(2\pi)^3$ afin de se ramener à la même normalisation.

La contribution (25) "à la Dyson" du graphe (a) se réécrit :

$$g^2 \int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\varepsilon}\,\gamma_5\,\frac{\tilde{\not{k}}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon}\,\gamma_5 \qquad (31)$$

avec

$$\frac{\tilde{\not{k}}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon} = \frac{\not{k}+m}{k^2-m^2+i\varepsilon} - \frac{\gamma^o}{2k_3} \quad , \quad \tilde{k}_{1,2,3} = k_{1,2,3} \text{ et } \tilde{k}_o = \frac{k_T^2+m^2}{2k_3} \quad .$$

Les identités :

$$\frac{1}{(p-k)^2-\mu^2+i\varepsilon}\,\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon} = \int_0^1 d\alpha\,\frac{1}{(k^2-2\alpha pk+c+i\varepsilon)^2} \qquad (32)$$

avec $c = 2m^2\alpha - m^2 - \alpha\mu^2$

ainsi que

$$\frac{1}{(k^2-2\alpha pk+c+i\varepsilon)^2} = -\int_0^{+\infty} d\beta\,\beta\,\exp i\,\beta(k^2-2\alpha pk+c+i\varepsilon) \qquad (33)$$

permettent d'intégrer dans (31) suivant dk_o et dk_3 et il vient après intégration par rapport à β :

$$-\frac{i\pi}{(2\pi)^2}\,g^2\int_0^1 d\alpha\int\frac{d^{n-2}k_T}{(2\pi)^{n-2}}\,\gamma_5\,\frac{\frac{k_T^2+m^2}{2\alpha p_3}\gamma^o - k_T\cdot\gamma_T+\alpha p_3\gamma^3}{-k_T^2-2\alpha^2 p_o p_3+2\alpha p_T.k_T+c+i\varepsilon}\,\gamma_5 \qquad .(34)$$

(29) se ramène alors à la forme (34) en posant $\frac{k_3}{p_3} = \alpha$. Remplaçant k_o et q_o par leur valeur et faisant le changement de variable $k_3 = \alpha p_3$, (29) devient (en prolongeant dans la dimension complexe transverse n-2) (nous multiplions par le facteur $[2(2\pi)^3]^{-1}$ afin de tenir compte de la différence de normalisation) :

$$-\frac{i\pi}{(2\pi)^2}\,g^2\int_0^1 d\alpha\int\frac{d^{n-2}k_T}{(2\pi)^{n-2}}\,\frac{\gamma_5\left(\frac{k_T^2+m^2}{2\alpha p_3}\,\gamma_o - k_T\gamma_T+\alpha p_3\gamma^3\right)\gamma_5}{2p_o p_3\alpha(1-\alpha)-\alpha[(p_T-k_T)^2+\mu^2]-(1-\alpha)(k_T^2+m^2)+i\varepsilon}$$

(35)

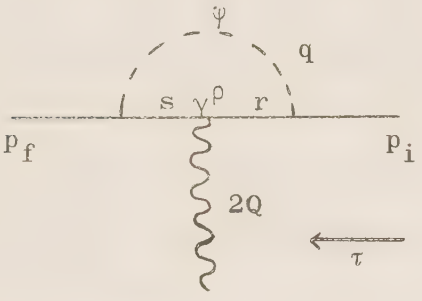
et on vérifie que le dénominateur de (35) est égal à celui de (34). Les méthodes covariante et non-covariante donnent donc bien les mêmes expressions analytiques dans la dimension n-2 pour le graphe (a). Le graphe (b) se traiterait de façon similaire.

Pour un calcul effectif, il est intéressant de remarquer que l'expression (29) est plus simple à calculer que l'expression (31) : elle en diffère en fait par l'intégration suivant k_o déjà effectuée dans le cas de la perturbation "à la Heitler".

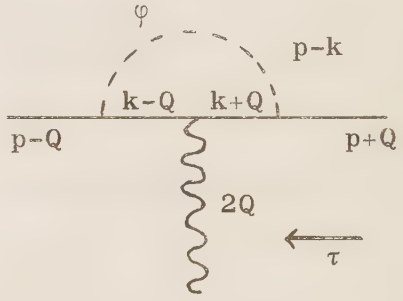
5.- MODELE DE WEINBERG : CONTRIBUTION DU BOSON SCALAIRE AU MOMENT MAGNETIQUE ANORMAL

a.- Formalisme du cône de lumière

Nous allons calculer la contribution du φ au moment magnétique anormal de l'électron à l'ordre le plus bas dans le modèle de Weinberg [24], en utilisant la théorie des perturbations "à la Heitler" (III.47). L'équivalence avec la méthode fonctionnelle de la théorie "à la Dyson" se montrerait aisément comme au paragraphe 3 ; on devrait simplement s'assurer (ce qui ne pose pas de difficultés) de la régularisation des termes en $\delta(\tau)$ dûs au propagateur de l'électron et au terme V_2 du Hamiltonien, ce qui entraîne leur compensation.



(a)



(b)

Dans le modèle de Weinberg, l'électron est couplé à un boson scalaire par un couplage $\frac{G}{\sqrt{2}}\bar{\psi}\psi\varphi$. Le développement (III.47) donne alors pour la partie V_1 du Hamiltonien le seul graphe (a). (Les autres graphes différant dans l'ordre par rapport à τ ne contribuent pas, dû à la positivité de q_3, r_3, s_3 : voir la calcul du graphe (1) du chapitre III). Le graphe (a) donne la contribution (nous utilisons là encore l'équivalent des règles données par Kogut et Soper [4]) :

$$-2\pi i\delta(p_{fo}+2Q_o-p_{io})\int d^2q_T d^2r_T d^2s_T \int_0^{+\infty}\frac{dq_3}{q_3}\frac{dr_3}{r_3}\frac{ds_3}{s_3}$$

$$(4\pi)^{-3/2}\frac{G}{\sqrt{2}}\delta^3(\vec{p}_f-\vec{s}-\vec{q})(\gamma s+m)\gamma^\rho \times (4\pi)^{-3/2}e\delta^3(\vec{s}+2\vec{Q}-\vec{r})(\gamma r+m)$$

$$(4\pi)^{-3/2}\frac{G}{\sqrt{2}}\delta^3(\vec{r}+\vec{q}-\vec{p}_i)\;\frac{1}{(p_{fo}-s_o-q_o+i\varepsilon)(p_{io}-q_o-r_o+i\varepsilon)} \qquad (36)$$

(nous n'écrivons pas les spineurs $\bar{u}(p_f)$ et $u(p_i)$).

Nous utilisons à nouveau la notation $p = (p_T , p_3)$.
Afin de simplifier le calcul de (36), nous allons nous placer dans un système de référence tel que $Q_o = Q_3 = 0$, ce qui est possible car Q^2 est négatif. Un tel repère a la propriété d'annuler la contribution de V_2, les graphes (c) et (d) se compensant.

(c) (d)

Ceci peut être démontré par des considérations générales de conservation du moment cinétique le long de l'axe 3 (voir sur ce point la réf. [25]). On peut le vérifier également par un calcul direct.

On pose alors $s+r = 2k$ et l'intégration sur les fonctions δ donne (notations du graphe (b))

$$- 2\pi i \delta^4(p_f+2Q-p_i) \int d^2k_T \int_0^{p_3} \frac{dk_3}{k_3^2(p_3-k_3)}$$

$$(4\pi)^{-9/2} \frac{G^2}{2} e \frac{[(\not{k}-\not{Q})+m]\gamma^\rho[(\not{k}+\not{Q})+m]}{[(p-Q)_o-(k-Q)_o-(p-k)_o][(p+Q)_o-(k-Q)_o-(p-k)_o]} . \quad (37)$$

Afin de se ramener à la normalisation des états habituelle, on doit multiplier par $[2(2\pi)^3]^{3/2}$. Prolongeant dans la dimension transverse et après avoir ôté un facteur $(2\pi)^4\delta^4(p_f+2Q-p_i)$, on obtient :

$$\frac{1}{16}\frac{1}{2\pi} G^2 e \int d^nk_T \int_0^{p_3} \frac{dk_3}{k_3^2(p_3-k_3)} [(\not{k}-\not{Q})+m]\gamma^\rho[(\not{k}+\not{Q})+m]$$

$$\frac{1}{[(p-Q)_o-(k-Q)_o-(p-k)_o][(p+Q)_o-(k+Q)_o-(p-k)_o]} : \quad (38)$$

transformons ainsi le dénominateur :

$$(p\pm Q)_o-(k\pm Q)_o-(p-k)_o = \frac{(p_T\pm Q_T)^2+m^2}{2p_3} - \frac{(k_T\pm Q_T)^2+m^2}{2k_3} - \frac{(p_T-k_T)^2+\mu^2}{2(p_3-k_3)}$$

$$= A \pm B$$

avec
$$A = \frac{p_T^2+m^2}{2p_3} - \frac{k_T^2+m^2}{2k_3} - \frac{(p_T-k_T)^2+\mu^2}{2(p_3-k_3)}$$

et
$$B = Q_T\left(\frac{p_T}{p_3} - \frac{k_T}{k_3}\right) .$$

Afin de calculer le moment magnétique anormal, nous ferons tendre Q_T vers zéro, ce qui nous permet d'utiliser le développement du dénominateur

$$\frac{1}{(A+B)(A-B)} = \frac{1}{A^2} + \frac{B^2}{A^4} + \ldots$$

dont seul le premier terme contribuera au moment magnétique. Nous avons donc finalement à calculer (à une constante près) :

$$\int \frac{d^nk_T}{(2\pi)^n} \int_0^{p_3} \frac{dk_3}{k_3^2(p_3-k_3)} \frac{[\not k-\not Q+m]\gamma^\rho[\not k+\not Q+m]}{\left(\frac{p_T^2+m^2}{2p_3} - \frac{k_T^2+m^2}{2k_3} - \frac{k_T^2+p_T^2-2k_T\cdot p_T+\mu^2}{2(p_3-k_3)}\right)^2} . \qquad (39)$$

Nous faisons dans (39) le changement de variable

$$\frac{k_3}{p_3} = 1-\alpha \ , \ \alpha \text{ variant de 0 à 1.}$$

Après quelques transformations, (39) s'écrit

$$\int \frac{d^nk_T}{(2\pi)^n} \int_0^1 d\alpha 4\alpha \frac{(\not k-\not Q+m)\gamma^\rho(\not k+\not Q+m)}{[(k_T-p_T(1-\alpha))^2+\alpha^2m^2+\mu^2(1-\alpha)]^2} .$$

Afin de simplifier l'intégration suivant d^nk_T , on fait le changement de variable $k_T' = k_T - (1-\alpha)p_T$. Les termes linéaires en k_T dans le numérateur donnent alors zéro.

Le numérateur s'écrit en fonction de k_T' :

$$\left\{\frac{[k_T'+p_T(1-\alpha)-Q_T)^2+m^2]}{2p_3(1-\alpha)}\gamma^o + (1-\alpha)p_3\gamma^3 - [k_T'+p_T(1-\alpha)-Q_T+m]\right\}\gamma^o\left\{Q_T\to -Q_T\right\} .$$

(40)

La seconde parenthèse se déduit de la première par le changement de Q_T en $-Q_T$.

Le moment magnétique anormal k est défini par l'identification de (37) avec

$$e\bar{u}(p-Q)\left[\gamma_\rho + \frac{k}{2m}\,\sigma_{\alpha\rho}2Q^\mu\right]u(p+Q) \qquad (41)$$

lorsque Q tend vers zéro. Nous devons donc isoler dans (40) les termes en $\sigma_{\mu\rho}Q^\mu = \frac{\gamma_\mu\gamma_\rho - \gamma_\rho\gamma_\mu}{2}Q^\mu$. Pour cela, remarquons que de la première parenthèse on peut extraire l'expression $[(p-Q)(1-\alpha)-\alpha Q]_\gamma+m$, qui par action sur le spineur $\bar{u}(p-Q)$ qui multiplie (40) à gauche est égale à $m(1-\alpha) - \alpha\not{Q}+m$, soit $m(2-\alpha) - \alpha\not{Q}$. De la même façon, on peut extraire de la deuxième parenthèse $m(2-\alpha) + \alpha\not{Q}$.

Ces deux expressions donnent dans le numérateur (40) $[m(2-\alpha) - \alpha\not{Q}]_\gamma{}^\rho[m(2-\alpha) + \alpha\not{Q}]$, d'où on extrait le terme linéaire en Q qui se lit (compte-tenu du repère choisi) :

$$-2\alpha m(2-\alpha)\sigma^{\mu\rho}Q_\mu \qquad . \qquad (42)$$

Une vérification assez longue montre que les quantités restantes dans (40) ne contribuent pas au moment magnétique.

L'intégration sur d^nk_T s'effectue maintenant aisément en utilisant (10), et l'on obtient :

$$\int_0^1 d\alpha\,\frac{1}{4\pi}\,G^2 em(2-\alpha)\alpha^2\,\frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{(\alpha^2m^2+\mu^2(1-\alpha))^{2-\frac{n}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(2)}\,\sigma^{\mu\rho}Q_\mu \qquad . \qquad (43)$$

Cette expression est finie pour $n = 2$, et par identification avec (41) nous obtenons finalement

$$k = \frac{G_W\,m^2}{\sqrt{2}\,8\,\pi^2}\int_0^1 d\alpha\,\frac{(2-\alpha)\alpha^2}{\alpha^2+r(1-\alpha)} \qquad . \qquad (44)$$

Nous avons utilisé $G = 2^{1/4}mG_W^{1/2}$, $\frac{G_W}{\sqrt{2}}$ étant la constante de couplage des interactions faibles habituelle, et nous avons posé $\frac{\mu^2}{m^2} = r$.

b.- Méthode fonctionnelle : jauge unitaire

Il est intéressant de recalculer la contribution du φ précédente par la méthode fonctionnelle dans la jauge unitaire [26]. Dans cette jauge on a à calculer au lieu de (37) l'intégrale (voir graphe (b)) :

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{G}{\sqrt{2}}\right)^2 i \frac{\gamma(k-Q)+m}{(k-Q)^2-m^2} e\gamma^\rho i \frac{\gamma(k+Q)+m}{(k+Q)^2-m^2} \frac{i}{(p-k)^2-\mu^2} u(p+Q) \quad . \qquad (45)$$

Faisant un développement par rapport à Q du dénominateur :

$$\frac{1}{[(k-Q)^2-m^2][(k+Q)^2-m^2]} = \frac{1}{(k^2-m^2)^2} + \frac{4(kQ)^2}{(k^2-m^2)^4} \cdots$$

et conservant comme précédemment le premier terme du développement, le dénominateur devient

$$\frac{1}{(k^2-m^2)^2[(p-k)^2-\mu^2]}$$

que nous écrivons sous la forme :

$$\frac{1}{(k^2-m^2)^2[(p(k)^2-\mu^2]} = \int_0^1 d\alpha \frac{2\alpha}{[k^2-2kp(1-\alpha)+m^2(1-2\alpha)-\mu^2(1-\alpha)]^3}$$

nous faisons alors le changement de variable $k' = k-(1-\alpha)p$, ce qui donne pour le dénominateur :

$$k'^2 - m^2\alpha^2 - \mu^2(1-\alpha) \quad .$$

Le numérateur est

$$\{\not{k}'+(1-\alpha)\not{p}-\not{Q}+m\}\gamma^\rho\{\not{k}'+(1-\alpha)\not{p}+\not{Q}+m\} \quad . \qquad (46)$$

Nous devons isoler dans (46) les termes en $\sigma^{\rho\mu}Q_\mu$. Un examen détaillé de (46) (en utilisant les identités $\bar{u}(p-Q).\gamma^\mu(p-Q)_\mu = m\bar{u}(p-Q)$ et $\gamma^\mu(p+Q)_\mu u(p+Q) = mu(p+Q)$) donne

$$2m\alpha(2-\alpha)\sigma^{\rho\mu}Q_\mu \quad . \qquad (47)$$

La contribution de (45) au moment magnétique anormal est par conséquent :

$$G^2 e \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^n k'}{(2\pi)^n} \frac{m(2-\alpha)\alpha^2 2\sigma^{\rho\mu} Q_\mu}{[k'^2 - m^2\alpha^2 - \mu^2(1-\alpha)]^3}$$

L'intégration suivant k' se fait à l'aide de l'expression [18]

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{[k^2 - L + i\varepsilon]^m} = \frac{(-1)^m i}{(2\sqrt{\pi})^n} L^{\frac{n}{2}-m} \frac{\Gamma\left(m-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(m)} \quad . \tag{48}$$

Le résultat est fini pour n = 4

$$\frac{m}{32\pi^2} G^2 e \int_0^1 d\alpha \frac{\alpha^2(2-\alpha)2\sigma^{\mu\rho} Q_\mu}{m^2\alpha^2 + \mu^2(1-\alpha)} \tag{49}$$

ce qui conduit à

$$k = \frac{G_W m^2}{\sqrt{2}\, 8\, \pi^2} \int_0^1 d\alpha \frac{(2-\alpha)\alpha^2}{\alpha^2 + r(1-\alpha)} \tag{50}$$

qui est bien identique à (44).

CONCLUSION

Sur deux exemples, un graphe de masse propre et un vertex, nous avons vu que la régularisation en dimensions permettait de vérifier l'équivalence entre les règles de Feynman provenant de la méthode habituelle fonctionnelle et les règles "à la Heitler" ou "à la Dyson" découlant d'une quantification sur un plan tangent au cône de lumière. Les autres graphes de masse propre et les vertex propres à l'ordre le plus bas se traiteraient sans difficulté de façon similaire, notamment la contribution du Z au moment magnétique anormal étudiée dans l'appendice du chapitre IV. Il resterait cependant à démontrer cette équivalence pour un graphe quelconque, ce qui reviendrait, dans un formalisme "à la Dyson", à montrer la régularisation d'un graphe quelconque contenant un nombre arbitraire de propagations "instantanées" de bosons de jauge et de fermions. Nous pensons que cette régularisation est effectivement possible mais la démonstration n'en est pas triviale et demanderait un examen soigneux des divers cas de figure que nous n'avons pas entrepris.

Nous terminons donc ce chapitre sur une démonstration incomplète mais qui rend plausible une telle généralité, nous contentant de noter que les difficultés si difficultés il y a, n'apparaîtraient que pour les graphes à deux boucles et plus.

Ajoutons que l'équivalence entre les formalismes "à la Dyson" et "à la Heitler" ne pose guère de difficultés car on peut passer de l'un à l'autre par des opérations (dans l'espace de configuration) compatibles avec la régularisation en dimensions.

***

Chapitre VI

POLARISATIONS ET CONE DE LUMIERE

Nous reprenons dans ce chapitre les notations habituelles des quadrivecteurs, abandonnant le "chapeau" introduit dans le premier chapitre pour les distinguer.

Les générateurs du groupe de Poincaré vérifient les relations de commutation [22] :

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 \\ [M_{\mu\nu}, P_\lambda] &= i(g_{\mu\lambda}P_\nu - g_{\nu\lambda}P_\mu) \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] &= i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \end{aligned} \qquad (1)$$

Nous utiliserons de préférence aux $M_{\mu\nu}$ les combinaisons génératrices des rotations

$$J_i = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}M_{jk}$$

et les combinaisons génératrices des transformations de Lorentz pures

$$K_i = M_{io}$$

La donnée d'un plan tangent au cône de lumière, que nous choisirons comme $x^o \pm x^3$ = constante, privilégie un sous-groupe du groupe de Poincaré : (1) montre que les opérateurs

$$P^o + P^3,\ P^o - P^3,\ P_T, J_3, K_1 \pm J_2, K_2 \mp J_1 \qquad (2)$$

commutent avec $P^o \pm P^3$, les deux sous-groupes qu'ils engendrent étant conjugués par parité. Si l'on regarde maintenant l'action de ces groupes

sur les plans $x^o \pm x^3$, on voit que $P^o \pm P^3, P_T, J_3, K_1 \pm J_2, K_2 \mp J_1$ laissent invariants ceux-ci, $P^o \mp P^3$ translatant la variable $x^o \pm x^3$.

Nous utiliserons les notations :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1}{\sqrt{2}}(P^o + P^3), \quad P_{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(P^o - P^3) \\ B_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 + J_2), \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_2 - J_1) \\ S_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(K_1 - J_2), \quad S_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(K_2 + J_1) \end{aligned} \tag{3}$$

Ces sous-groupes ont la structure d'un groupe de Galilée à deux dimensions, avec la correspondance

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(P^o \pm P^3) &\rightarrow \text{Hamiltonien} \\ P_T &\rightarrow \text{Moment} \\ J_3 &\rightarrow \text{Moment angulaire} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(P^o \mp P^3) &\rightarrow \text{Masse} \end{aligned} \tag{4}$$

et B_1, B_2 (resp. S_1, S_2) $\rightarrow$ générateurs des boosts dans les directions x et y.

Il est naturel maintenant de chercher à définir les tétrades des polarisations [22] en liaison avec les sous-groupes précédents. Remarquant qu'en adjoignant K_3 (on a privilégié l'axe z) la transformation de Lorentz $e^{-iv_T B_T}\, e^{-i\omega K_3}$ permet d'amener l'état au repos d'une particule de masse m sur un état d'impulsion quelconque p^μ, avec

$$e^{\omega} = \sqrt{2}\,\frac{p_n}{m}, \quad v_T = \frac{p_T}{p_n} \tag{5}$$

nous définissons les tétrades de polarisation :

$$e(\alpha) = e^{-iv_T B_T}\, e^{-i\omega K_3}\, \overset{o}{n}(\alpha), (\alpha = 0,1,2,3) \tag{6}$$

(α) étant la tétrade au repos :

$$\overset{(o)}{e}(\alpha)^\mu = \delta_{\mu\alpha}$$

Nous aurions pu de même définir le système :

$$e(\alpha) = e^{-iv'_T \cdot S_T} e^{i\omega' K_3} \overset{\circ}{n}(\alpha) \qquad (7)$$

avec

$$e^{\omega'} = \frac{\sqrt{2}p_{\overline{n}}}{m} , \quad v'_T = \frac{p_T}{p_{\overline{n}}} \qquad (8)$$

qui est conjugué par parité du système précédent.

Avec ces choix nous définissons les états que nous appelerons états - O

$$|\vec{p},\nu> = e^{-iv_T B_T} e^{-i\omega K_3} |m,\vec{0};\nu> \qquad (9)$$

$$|\vec{p},\nu) = e^{-iv'_T S_T} e^{+i\omega' K_3} |m,\vec{0};\nu> \qquad (10)$$

Avec

$$\wp|\vec{p},\nu> = \eta|-\vec{p},\nu) \qquad (11)$$

$\wp$ est l'opérateur de parité, η la parité intrinsèque.

Le choix des tétrades (6) et (7) est le plus simple pour nos besoins ; une rotation supplémentaire J_3 par exemple changerait simplement la phase des états-O.

De tels états, de par leur origine, seront commodes à utiliser dans une théorie quantifiée sur un plan tangent au cône de lumière. Nous allons voir dans l'article qui suit que les propriétés de croisement et d'analycité qu'ils donnent aux éléments de matrice S ne les défavorisent nullement par rapport aux états d'hélicité ou aux états canoniques de Wigner. Nous soulignerons d'autre part l'interpolation qu'ils procurent entre des impulsions faibles et élevées des états canoniques et d'hélicité et qui peut trouver son utilité dans certains problèmes.

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 8, NUMBER 2 15 JULY 197

Null-Plane Formalism nd Polarization

A. Chakrabarti and C. Darzens
Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, 17 rue Descartes, 75230 Paris, Cedex 05, France
(Received 30 January 1973)

A systematic study is made of the properties of spin in the context of null-plane (or "infinite-momentum") formalism, where the spin projection is invariant under the action of a Galilean subgroup of the Poincaré group. We give explicitly its relations with the helicity and the canonical formalism. The crossing relations and the structure of kinematic singularities of the corresponding amplitudes are studied. It is shown that these amplitudes can be kinematically regularized in a fairly simp' fashion. Reduction of direct products and partial-wave expansions are also discussed and some particular simple properties are pointed out.

I. INTRODUCTION

The significance of a two-dimensional Galilean subgroup of the Poincaré group and its relation to high-energy processes (the so-called "infinite momentum limit") have been studied by several authors. This has led to the "infinite momentum" or "null-plane formalism[1] for fields. Bacry and Chang[2] and Soper[2] have studied polarization by defining states which transform very simply under the Galilean subgroup. The same definition of states and the corresponding parametrization of the the momenta have been utilized also by other authors[3,4] for partial-wave analysis of a particular type and has been called the horispheric system or "O-system." Bacry and Chang study "kinematics at infinite momentum" through a transformation. Soper also emphasizes the limiting properties of "infinite-momentum helicity states." To avoid trivial confusion let us note explicitly that the following formalism is valid for any momentum. The results in Secs. II and III include the known results essential for our purposes.

For brevity we will also adopt the term "O states" for states defined through such spin projections. We will make a systematic study of their properties, including crossing relations and kinematical singularities of the corresponding scattering amplitudes. We will compare such properties with those of the well-known helicity and canonical states (which we will call henceforth "h states" and "c states," respectively). The so-called transversity states often used are related to the helicity states by a rotation $\frac{1}{2}\pi$ about an axis chosen conventionally to be the x axis. We will introduce states related by the same transformation to the O and c states and will henceforth use the terms "trans-O," "trans-c," and "trans-h" states, respectively ("trans-h" being the usual transversity states).

Let us now introduce some definitions and notations. To avoid confusion among different formalisms, we keep the usual significance of the indices $\mu = 0, 1, 2, 3$, with $g^{00} = -g^{ii} = 1$ $(i = 1, 2, 3)$ [i.e., we do not adopt the notations of Refs. 1(a) and 2(b)]. Let

$$n_\mu = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(1, 0, 0, +1), \quad \bar{n}_\mu = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(1, 0, 0, -1). \tag{1.1}$$

For any vector A_μ we define

$$A_n = A \cdot n = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(A^0 + A^3),$$
$$A_{\bar{n}} = A \cdot \bar{n} = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(A^0 - A^3), \tag{1.2}$$

and the "transverse" components are $\underline{A} = (A^1, A^2)$. One can, of course, choose in a more general fashion any two vectors n, $\bar{n}$ such that $n^2 = 0 = \bar{n}^2$, $n \cdot \bar{n} = 1$. But the simple case (1.1) is adequate for our purpose.

In terms of the indices $(n, \bar{n}, 1, 2)$, we have

$$g_{n\bar{n}} = g_{\bar{n}n} = 1 = -g_{11} = -g_{22}, \tag{1.3}$$

and

$$A \cdot B = A_n B_{\bar{n}} + A_{\bar{n}} B_n - \underline{A} \cdot \underline{B}.$$

(We reserve the notation $\vec{A}$ $[= (A^1, A^2, A^3)]$ for the space part of A.)

$M_{\mu\nu}$ and P_μ are the generators of the Poincaré group and

$$M_{ij} = \epsilon_{ijk} J_k, \quad M_{0i} = K_i,$$
$$P_n = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(P^0 + P^3), \quad P_{\bar{n}} = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(P^0 - P^3),$$
$$\underline{P} = (P^1, P^2), \tag{1.4}$$
$$B_1 = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(K_1 + J_2), \quad B_2 = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(K_2 - J_1),$$
$$S_1 = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(K_1 - J_2), \quad S_2 = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(K_2 + J_1),$$

with the notation $\underline{B} = (B_1, B_2)$, $\underline{S} = (S_1, S_2)$.

$\underline{P}, J_3$ along with P_n, $\underline{B}$ or $P_{\bar{n}}$, $\underline{S}$ constitute a two-dimensional Galilean subgroup.[1] These are re-

lated through the parity operator $\mathcal{P}$, where

$$\mathcal{P}(P_n, \underline{B})\mathcal{P} = (P_{\bar{n}}, -\underline{S}) . \tag{1.5}$$

For any 4-vector operator A, we have

$$\begin{aligned} e^{i\omega K_3} A e^{-i\omega K_3} &= (e^{\omega} A_n, \underline{A}, e^{-\omega} A_{\bar{n}}) , \\ e^{i\underline{v}\cdot\underline{B}} A e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} &= (A_n, \underline{A} + \underline{v} A_n, \tilde{A}_{\bar{n}}) , \\ e^{i\underline{u}\cdot\underline{S}} A e^{-i\underline{u}\cdot\underline{S}} &= (\tilde{A}_n, \underline{A} + \underline{u} A_{\bar{n}}, A_{\bar{n}}) , \end{aligned} \tag{1.6}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\bar{n}} &= (A_{\bar{n}} + \underline{v}\cdot\underline{A} + \tfrac{1}{2} A_n \underline{v}^2) , \\ \tilde{A}_n &= (A_n + \underline{u}\cdot A + \tfrac{1}{2} A_{\bar{n}} \underline{u}^2) . \end{aligned}$$

II. DEFINITION OF THE O STATE

We will start by considering *positive-energy massive particles*. The simple generalization to include negative-energy states will be indicated later and the limit to the zero-mass case presents no problem. Indeed, we obtain directly the well-known description of the zero-mass states in terms of the little group E_2.

Starting with the rest-frame state (mass $m > 0$) with the spin projection ν along the z axis,

$$|m, \vec{0}; \nu\rangle , \tag{2.1}$$

let us define

$$|p, \nu\rangle = e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} e^{-i\omega K_3} |m, 0; \nu\rangle \tag{2.2}$$

$$= e^{-i\omega K_3} e^{-ie^{\omega}\underline{v}\cdot\underline{B}} |m, \vec{0}; \nu\rangle \tag{2.2'}$$

and

$$|p, \nu\rangle = e^{-i\underline{v}'\cdot\underline{S}} e^{+i\omega' K_3} |m, \vec{0}; \nu\rangle , \tag{2.3}$$

where

$$\begin{aligned} e^{\omega} &= \frac{\sqrt{2}\, p_n}{m} , \quad \underline{v} = \underline{p}/p_n , \\ e^{\omega'} &= \frac{\sqrt{2}\, p_{\bar{n}}}{m} , \quad \underline{v}' = \underline{p}/p_{\bar{n}} . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Using (1.5) we obtain

$$\mathcal{P}|\vec{p}, \nu\rangle = \eta |-\vec{p}, \nu\rangle , \tag{2.5}$$

where η is the intrinsic parity.

Let us first study (2.2) in more detail. In the language of "tetrads,"[5,6] the three components of the spin operator are given by

$$-\frac{1}{m} W \cdot e_{(i)} \quad (i = 1, 2, 3),$$

where

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} P^{\mu} M^{\rho\lambda} \\ &= -i[P^{\mu}, \vec{K}\cdot\vec{J}] \\ &= (\vec{P}\cdot\vec{J}, P^0\vec{J} - \vec{P}\times\vec{K}) , \end{aligned} \tag{2.6}$$

and $e_{(i)}\cdot p = 0$, $e_{(i)}\cdot e_{(j)} = -\delta_{ij}$.

Defining for the rest frame

$$\begin{aligned} \hat{e}^{\mu}_{(\alpha)} &= \delta_{\mu\alpha} , \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), \\ e_{(\alpha)} &= \Lambda_B \hat{e}_{(\alpha)} , \end{aligned}$$

with

$$U(\Lambda_B) = e^{-\underline{v}\cdot\underline{B}} e^{-i\omega K_3} \tag{2.7}$$

[as in (2.2)], one obtains:

$$\begin{aligned} e^{\mu}_{(0)} &= p^{\mu}/m , \\ e^{\mu}_{(1)} &= \left(\frac{p^1}{\sqrt{2}\, p_n}, 1, 0, \frac{-p^1}{\sqrt{2}\, p_n}\right), \\ e^{\mu}_{(2)} &= \left(\frac{p^2}{\sqrt{2}\, p_n}, 0, 1, \frac{-p^2}{\sqrt{2}\, p_n}\right), \\ e^{\mu}_{(3)} &= \frac{p^{\mu}}{m} - \frac{m}{p_n} n^{\mu} . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Thus the component to be diagonalized is

$$-\frac{1}{m} W \cdot e_{(3)} = \frac{W_n}{P_n} , \tag{2.9}$$

which may be verified to be the same as the spin operator constructed by Soper.[2]

We see from (2.8), (2.9) the fundamental property *that for any momentum, though $e_{(3)}$ is a space-like vector, what is effectively diagonalized (since $W\cdot p = 0$) is the projection of W on a fixed lightlike direction n.*

Instead of fixing our attention from the very beginning on momentum eigenstates, we can define, using the operators P^{μ}, the spin operators

$$\begin{aligned} \Sigma_{(B)} &= \frac{1}{M}\left(\underline{W} - \frac{W_n}{P_n}\underline{P}\right), \\ \Sigma_{3(B)} &= \frac{W_n}{P_n} \quad [M = (P^{\mu}P_{\mu})^{1/2}], \end{aligned} \tag{2.10}$$

where

$$\Sigma_i |p, \nu\rangle = -\frac{W}{m}\cdot e_{(i)} |p, \nu\rangle .$$

But with such a definition of $\vec{\Sigma}$, one can consider directly its action on a more general class of states, which diagonalize P_n but not necessarily $\underline{P}$ and $P_{\bar{n}}$.

Using

$$\begin{aligned} [W_{\mu}, W_{\nu}] &= i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^{\rho} W^{\sigma} , \\ [P_{\mu}, W_{\nu}] &= 0 , \end{aligned} \tag{2.11}$$

one obtains the usual spin algebra

$$[\Sigma_{(B)i}, \Sigma_{(B)j}] = i\epsilon_{ijk}\Sigma_{(B)k} . \tag{2.12}$$

The above definition may be compared with the canonical spin operator[7]

$$\vec{\Sigma}_{(c)} = \frac{1}{M}\left(\vec{W} - \frac{W^0}{P^0 + M}\vec{P}\right) \tag{2.13}$$

These correspond to the tetrads

$$e_{(i)} = \Lambda_{(p)} \cdot \hat{e}_{(i)}, \tag{2.14}$$

where $\Lambda_{(p)}$ is the *pure Lorentz transformation* such that

$$\Lambda_{(p)}(1, \vec{0}) = \frac{p}{m} .$$

Using the results (1.6) for P and W, one obtains (for any ω and $\underline{v}, \underline{u}$)

$$\begin{aligned} &e^{i\omega K_3}\vec{\Sigma}_{(B)}e^{-i\omega K_3} = \vec{\Sigma}_{(B)}, \\ &e^{i\underline{v}\cdot\underline{B}}\vec{\Sigma}_{(B)}e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} = \vec{\Sigma}_{(B)}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

and

$$e^{i\underline{u}\cdot\underline{S}}\vec{\Sigma}_{(B)}e^{-i\underline{u}\cdot\underline{S}} = R_{(B)}\vec{\Sigma}_{(B)},$$

where the Wigner rotation $R_{(B)}$, written here formally in terms of operators, corresponds on 4-momentum basis to a rotation about the axis

$$\vec{a} = \left(u^2, -u^1, \frac{1}{m}(p^1u^2 - p^2u^1)\right)$$

through an angle χ where

$$\begin{aligned} &\cos\chi = 1 - \frac{m^2\vec{a}^2}{2P_n\tilde{P}_n}, \\ &\sin\chi = \frac{m|\vec{a}|}{2P_n\tilde{P}_n}(2P_n + \underline{P}\cdot\underline{u}), \end{aligned} \tag{2.16}$$

where $\tilde{P}_n = P_n + \underline{u}\cdot\underline{P} + \frac{1}{2}P_n u^2$.

This formula is not particularly simple. But particular cases will be of crucial importance later on.

Under the action of J_3, $\vec{\Sigma}_{(B)}$ of course simply turns like a 3-vector round the z axis. As a consequence we have the following transformation laws for the momentum basis states of the representation $[m, s]$. Denoting the transformed momentum in each case by p' [see (1.6)],

$$\begin{aligned} &e^{-i\varphi J_3}|p, \nu\rangle = e^{-i\varphi\nu}|p', \nu\rangle, \\ &e^{-i\omega K_3}|p, \nu\rangle = |p', \nu\rangle, \\ &e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}}|p, \nu\rangle = |p', \nu\rangle, \\ &e^{-i\underline{u}\cdot\underline{S}}|p, \nu\rangle = |p', \nu'\rangle\mathfrak{D}^s_{\nu'\nu}(R_{(B)}(\underline{u}, \vec{p})), \end{aligned} \tag{2.17}$$

where $R_{(B)}(\underline{u}, \vec{p})$ is given by (2.16). This is the only nontrivial Wigner rotation in this basis.

Starting with the states $|p, \nu\rangle$, we obtain through similar considerations the spin operator

$$\begin{aligned} &\underline{\Sigma}_{(S)} = \frac{1}{M}\left(\underline{W} - \frac{W_n}{P_n}\underline{P}\right), \\ &\Sigma_{(S)3} = -\frac{W_n}{P_n}, \end{aligned} \tag{2.18}$$

with

$$\mathcal{P}\vec{\Sigma}_{(B)}\mathcal{P} = \vec{\Sigma}_{(S)} . \tag{2.19}$$

Using this relation one obtains

$$e^{-i\underline{v}\cdot\underline{H}}\vec{\Sigma}_{(S)}e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} = R_{(S)}(\underline{v}, \vec{p})\vec{\Sigma}_{(S)}, \tag{2.20}$$

where

$$R_{(S)}(\underline{v}, \vec{p}) = R_{(B)}(-\underline{v}, -\vec{p}) . \tag{2.21}$$

As compared to (2.17), we have for $|p, \nu)$ similar results for J_3 and K_3, with

$$\begin{aligned} &e^{-i\underline{u}\cdot\underline{S}}|p, \nu) = |p', \nu), \\ &e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}}|p, \nu) = |p', \nu')\mathfrak{D}^s_{\nu'\nu}(R_{(S)}(\underline{v}, \vec{p})) . \end{aligned} \tag{2.22}$$

We will also need the actions of arbitrary pure rotations and pure Lorentz transformations. For this purpose it is sufficient to consider the action of J_2 on the states $|p, \nu\rangle$, which combined with the preceding results gives the rest.

It can be shown that

$$e^{-i\alpha J_2} = e^{i\zeta K_3}e^{(i/\sqrt{2})\sin\alpha B_1}e^{i\sqrt{2}\tan(\alpha/2)S_1} \tag{2.23}$$

[where $e^{-\zeta} = \cos^2(\alpha/2)$]

$$= e^{-i\zeta K_3}e^{(i/\sqrt{2})\sin\alpha S_1}e^{-i\sqrt{2}\tan(\alpha/2)B_1} . \tag{2.23'}$$

[For this purpose it is helpful to use a representation of SL(2, C) by 2×2 matrices. Also the apparently singular point $\alpha = \pi$ causes no problem; in subsequent related applications, unambiguous finite results are obtained on approaching π from either side.]

From (2.17),

$$e^{-i\alpha J_2}|p, \nu\rangle = |p', \nu'\rangle\mathfrak{D}^s_{\nu'\nu}(R(\alpha, p)), \tag{2.24}$$

where $R(\alpha, p)$ is given by (2.16) with

$$u^1 = -\sqrt{2}\,\tan\tfrac{1}{2}\alpha, \quad u^2 = 0 .$$

This angle we may denote by $\tilde{\alpha}^{\vec{}}_{\vec{p}}$.

Of particular interest for future use is the case where the momentum lies in the z-x plane:

$$p^3 = |p|\cos\theta, \quad p^1 = |p|\sin\theta, \quad p^2 = 0 .$$

Then (2.24) gives a rotation, *about the y axis itself*, through an angle $\tilde{\alpha}^{\vec{}}_{\vec{p}}$ such that

$$\begin{aligned} &\cos\tilde{\alpha}^{\vec{}}_{\vec{p}} = 1 - \frac{2m^2\sin^2(\frac{1}{2}\alpha)}{\sqrt{2}\,p_n[p^0 + |p|\cos(\theta + \alpha)]}, \\ &\sin\tilde{\alpha}^{\vec{}}_{\vec{p}} = \frac{m\sin\alpha[p^0 + |p|\cos(\theta + (\frac{1}{2}\alpha)/\cos(\frac{1}{2}\alpha)]}{\sqrt{2}\,p_n[p^0 + |p|\cos(\theta + \alpha)]}; \end{aligned} \tag{2.25}$$

the corresponding results for $|p, \nu)$ are obtained from (2.21) and (2.23′).

Let us now consider the explicit forms of the generators for the states $|p, \nu\rangle$, corresponding to the irreducible representation $[m, s]$. [The results

for $|p,\nu)$ are obtained through parity transformation.]

The simplest forms are obtained if we consider $\underline{P}$, P_n as the independent components and

$$P_{\bar{n}} = \frac{(\underline{P})^2 + m^2}{2P_n} \tag{2.26}$$

when (with $\partial_i \equiv \partial/\partial P^i$, $i = 1, 2$)

$$[\partial_i, P^i] = 1, [\partial_n, P_n] = 1,$$
$$[\partial_i, P_{\bar{n}}] = \frac{P^i}{P_n}, \tag{2.27}$$
$$[\partial_n, P_{\bar{n}}] = -\frac{P_{\bar{n}}}{P_n}.$$

The corresponding scalar product may be taken to be

$$\langle p,\nu|p',\nu'\rangle = 2p_n\delta(p_n - p_n')\delta(\underline{p} - \underline{p}')\delta\nu\nu'. \tag{2.27'}$$

Then it can be shown [by considering infinitesimal forms of (2.17)] that:

$$J_3 = -i(P^1\partial_2 - P^2\partial_1) + \Sigma_3,$$
$$K_3 = -iP_n\partial_n,$$
$$B_i = -iP_n\partial_i,$$
$$S_1 = -i(P_{\bar{n}}\partial_1 + P^1\partial_n) - \frac{P^2}{P_n}\Sigma_3 - \frac{m}{P_n}\Sigma_2, \tag{2.28}$$
$$S_2 = -i(P_{\bar{n}}\partial_2 + P^2\partial_n) + \frac{P^1}{P_n}\Sigma_3 + \frac{m}{P_n}\Sigma_1.$$

Here $\vec{\Sigma}$ are the usual $(2S+1)\times(2S+1)$ matrices, generators of the rotation group (e.g., $\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\vec{\tau}$ for $s = \frac{1}{2}$ in terms of the Pauli matrices). It may be verified that calculating W^μ from (2.28) and substituting in (2.10), we get simply

$$\vec{\Sigma}_{(B)} = \vec{\Sigma} \tag{2.29}$$

for this representation.[2(a)] [Instead of (2.27), if we consider, as usual, P^1, P^2, P^3 as independent components, the corresponding results, easily obtained, are somewhat less simple.]

In (2.28) m is to be replaced by ϵm, where $\epsilon = p^0/|p^0|$ if we consider both signs of energy. This is also true for other definitions involving m. This ensures that states with momenta p^μ and $-p^\mu$ transform in the same way, which is important in considering crossing relations.[8]

Also putting $m = 0$, we recover exactly the representation studied in Ref. 9 for the case of discrete spin. For the sake of completeness, we mention that for zero-mass continuous spin [Refs. 10], by defining

$$\Sigma_i = W^i - \frac{W_n}{P_n}P^i + \delta_{3i}\frac{W_n}{P_n},$$

one generates the algebra of E_2. For discrete spin, this reduces to $\Sigma_{1,2} = 0$, $\Sigma_3 = W_n/P_n$.

III. RELATION WITH SPINOR REPRESENTATIONS

The relation of the above representations with the covariant spinor representations can be studied in exactly the same way as that between the canonical and spinor representations.[11]

For the important case of spin $\frac{1}{2}$, starting with the Dirac representation we note that the spinor matrix corresponding to the transformation (2.2) can be obtained (using the appropriate representation[11] of the γ matrices) as

$$Q = \begin{vmatrix} [p]_+ & 0 \\ 0 & [p]_- \end{vmatrix},$$

where

$$[p]_+ = \left(\frac{\sqrt{2}\,p_n}{m}\right)^{-1/2}\begin{vmatrix} \sqrt{2}\,p_n/m & 0 \\ \sqrt{2}\,p_+/m & 1 \end{vmatrix},$$
$$[p]_- = \left(\frac{\sqrt{2}\,p_n}{m}\right)^{-1/2}\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2}\,p_-/m \\ 0 & \sqrt{2}\,p_n/m \end{vmatrix}, \tag{3.1}$$
$$[p_\pm = (\tfrac{1}{2})^{1/2}(p^1 \pm ip^2)].$$

Starting with the Dirac representation of $M^{\mu\nu}$, the transformed generators

$$Q^{-1}M^{\mu\nu}Q \tag{3.2}$$

correspond to (2.28) (for the same choice of independent variables), with

$$\vec{\Sigma} = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{\tau} & 0 \\ 0 & \vec{\tau} \end{vmatrix}.$$

We have also for the transformed Dirac equation

$$Q^{-1}(\gamma^\mu p_\mu - m)Q = [\gamma^0(p^\mu p_\mu)^{1/2} - m], \tag{3.3}$$

exactly as for the canonical case.[11] This result follows directly from the covariance of the γ matrices.

The solutions of the Dirac equation diagonalizing W_n/P_n in the Dirac representation are given by[12]

$$u_\pm = \begin{vmatrix} [p]_+ & \chi_\pm \\ [p]_- & \chi_\pm \end{vmatrix}, \quad v_\pm = \begin{vmatrix} [p]_+ & C^{-1}\chi_\pm \\ [p]_- & C\chi_\pm \end{vmatrix}, \tag{3.4}$$

where

$$\chi_+ = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_- = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$C = i\tau_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Analogous transformations can be carried out for spinor representations for arbitrary spin (Soper[2] and Ref. 11).

IV. RELATION WITH HELICITY AND CANONICAL STATES

We have defined, for the representation $[m, s]$,

$$|p, \nu\rangle = e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} e^{-i\omega K_3} |\vec{0}, \nu\rangle ,$$

where $\underline{v} = \underline{p}/p_n$, $e^{\omega} = \sqrt{2}\, p_n/m$. The helicity states are defined as [13]

$$\begin{aligned} |p, \lambda\rangle &= R(\hat{p}) e^{-i\eta K_3} |\vec{0}, \lambda\rangle \\ &= e^{-i\varphi J_3} e^{-i\theta J_2} e^{i\varphi J_3} e^{-i\eta K_3} |\vec{0}, \lambda\rangle , \end{aligned} \tag{4.1}$$

where (θ, φ) are the angular coordinates of p and $\tanh\eta = |\vec{p}|/p^0$.

Hence (suppressing for our present purpose the δ functions corresponding to the 4-momenta),

$$\begin{aligned} \langle p, \lambda | p, \nu\rangle &= \langle \vec{0}, \lambda | e^{i\eta K_3} R^{-1}(\hat{p}) | p, \nu\rangle \\ &= e^{i\varphi(\nu-\lambda)} d^s_{\lambda\nu}(-\bar{\theta}) , \end{aligned} \tag{4.2}$$

where putting $\alpha = -\theta$ in (2.25), denoting $(-\bar{\theta})^{\rightarrow}_{\vec{p}}$ by simply $-\bar{\theta}$, we obtain

$$\cos\bar{\theta} = \frac{p^0\cos\theta + |p|}{p^0 + |p|\cos\theta} , \quad \sin\bar{\theta} = \frac{m\sin\theta}{p^0 + |p|\cos\theta} . \tag{4.3}$$

Some useful results are

$$\begin{aligned} \cos\tfrac{1}{2}\bar{\theta} &= \left(\frac{p^0 + |p|}{p^0 + p^3}\right)^{1/2} \cos\tfrac{1}{2}\theta , \\ \sin\tfrac{1}{2}\bar{\theta} &= \left(\frac{p^0 - |p|}{p^0 + p^3}\right)^{1/2} \sin\tfrac{1}{2}\theta \quad (p^3 = |p|\cos\theta) , \end{aligned} \tag{4.3'}$$

or

$$\begin{aligned} \tan\tfrac{1}{2}\bar{\theta} &= \left(\frac{p^0 - |p|}{p^0 + |p|}\right)^{1/2} \tan\tfrac{1}{2}\theta \\ &= \left(\frac{m}{p^0 + |p|}\right) \tan\tfrac{1}{2}\theta . \end{aligned} \tag{4.3''}$$

We will often use the case $\varphi = 0$ ($\vec{p}$ in zx plane). Let us also note that for $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ($\vec{p}$ in xy plane),

$$\cos\bar{\theta} = v, \quad \sin\bar{\theta} = (1 - v^2)^{1/2} , \tag{4.4}$$

where $v = |\vec{p}|/p^0$, i.e., the rotation corresponds directly to the Lorentz contraction factor.

The canonical states are defined as (see Appendix A of Ref. 8 and Ref. 11)

$$\begin{aligned} |p, \sigma\rangle &= e^{-i\eta\hat{\delta}\cdot\vec{K}} |\vec{0}, \sigma\rangle \quad (\tanh\eta = |\vec{p}|/p^0 , \hat{p} = \vec{p}/|\vec{p}|) \\ &= R(\hat{p}) e^{-i\eta K_3} R^{-1}(\hat{p}) |\vec{0}, \sigma\rangle , \end{aligned} \tag{4.5}$$

Hence

$$\begin{aligned} \langle p, \sigma | p, \nu\rangle &= \langle \vec{0}, \sigma | R(\hat{p}) e^{i\eta K_3} R^{-1}(\hat{p}) | p, \nu\rangle \\ &= e^{i\varphi(\nu-\sigma)} d^s_{\sigma\nu}(\theta - \bar{\theta}) . \end{aligned} \tag{4.6}$$

From (4.2) one obtains the property noted by Soper [2] that the O states tend to the h states as $|\vec{p}| \to \infty$. But this is not the only interesting limiting property. From (4.6) one can verify that the O states tend rapidly to the c states as $|\vec{p}| \to 0$. It is known that while h states possess certain *convenient* properties at high energy, the c states provide the most direct generalization of nonrelativistic formalism at low energy. *The O states thus gather together the convenient properties of the h and c states, in this respect.*

Let us now define the following states:

$$\text{trans-}h: \quad |p, \bar{\lambda}\rangle = |p, \lambda\rangle \mathfrak{D}^s_{\lambda\bar{\lambda}}(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi) , \tag{4.7}$$

$$\text{trans-}c: \quad |p, \bar{\sigma}\rangle = |p, \sigma\rangle \mathfrak{D}^s_{\sigma\bar{\sigma}}(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi) , \tag{4.8}$$

$$\text{trans-}O: \quad |p, \bar{\nu}\rangle = |p, \nu\rangle \mathfrak{D}^s_{\nu\bar{\nu}}(\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi, -\tfrac{1}{2}\pi) \tag{4.9}$$

(For the sake of uniformity we have denoted the usual transversity states as the trans-h $|p, \bar{\lambda}\rangle$). These are often convenient for studying scattering amplitudes in the zx plane. For $\varphi = 0$ ($p^1 = |p|\sin\theta$, $p^2 = 0$, $p^3 = |p|\cos\theta$), we obtain from (4.2)–(4.9),

$$\begin{aligned} \langle p, \bar{\lambda} | p, \bar{\nu}\rangle &= e^{+i\bar{\theta}\nu} \delta_{\bar{\lambda}\bar{\nu}} , \\ \langle p, \bar{\sigma} | p, \bar{\nu}\rangle &= e^{-i(\theta - \bar{\theta})\nu} \delta_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} . \end{aligned} \tag{4.10}$$

When considering scattering amplitudes in the zx plane we will adopt the convention that if the angular coordinates of $\vec{p}$ are $(0, \theta)$, those of $-\vec{p}$ are $(0, \theta + \pi)$ and not $(\pi, \pi, -\theta)$.

Let us note that for $p_2 = 0$,

$$\begin{aligned} e^{i\pi J_y} |p, \nu\rangle &= e^{i\pi J_y} (e^{-iv^1 B_1} e^{-i\omega K_3}) e^{-i\pi J_y} e^{i\pi J_y} |\vec{0}, \nu\rangle \\ &= e^{iv^1 S_1} e^{i\omega K_3} [(-1)^{S-\nu} |\vec{0}, -\nu\rangle] \\ &= (-1)^{S-\nu} |-\vec{p}, -\nu\rangle \end{aligned}$$

or

$$|\vec{p}, \nu\rangle = (-1)^{S+\nu} e^{i\pi J_y} |-\vec{p}, -\nu\rangle \tag{4.11}$$

$$= (-1)^{S+\nu} |\vec{p}, \nu'\rangle d^S_{\nu'-\nu}(-\bar{\pi})_{-\vec{p}} , \tag{4.11'}$$

where [from (2.25)]

$$\cos(-\bar{\pi})_{-\vec{p}} = 1 - \frac{2m^2}{p_0^2 - |p|^2\cos^2\theta} ,$$

$$\sin(-\bar{\pi})_{-\vec{p}} = \frac{2m|p|\sin\theta}{p_0^2 - |p|^2\cos^2\theta} .$$

In terms of h states, one obtains

$$\langle p, \lambda | p, \nu\rangle = d^S_{\lambda\nu}(-\bar{\theta}) , \tag{4.12}$$

where

$$\begin{aligned} \cos\bar{\theta}' &= \frac{p^0\cos\theta - |p|}{p^0 - |p|\cos\theta} , \\ \sin\bar{\theta}' &= \frac{m\sin\theta}{p^0 - |p|\cos\theta} . \end{aligned} \tag{4.13}$$

The results corresponding to (4.6) and those to (4.10) [for $|p, \bar{\nu}\rangle$ defined as in (4.9)], are obtained by substituting $\bar{\theta}'$ for $\bar{\theta}$.

Corresponding to (4.3′) and (4.3″) we now have

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta' = \left(\frac{p^0 - |p|}{p^0 - p^3}\right)^{1/2} \cos\tfrac{1}{2}\theta\,, \qquad \sin\tfrac{1}{2}\theta' = \left(\frac{p^0 + |p|}{p^0 - p^3}\right)^{1/2} \sin\tfrac{1}{2}\theta\,, \tag{4.13'}$$

and

$$\tan\tfrac{1}{2}\theta' = \left(\frac{p^0 + |p|}{p^0 - |p|}\right)^{1/2} \tan\tfrac{1}{2}\theta = \left(\frac{p^0 + |p|}{m}\right) \tan\tfrac{1}{2}\theta\,. \tag{4.13''}$$

V. CROSSING RELATIONS

The crossing relations for the O and trans-O amplitudes can be derived directly from the basic principles or deduced from the known relations for the h, c, or trans-h amplitudes.[6,11] In what follows, we will only point out certain basic results, relying heavily on the formalism of Ref. 8. It is simplest to start from the crossing relations between the c.m. s- and t-channel trans-h (or transversity) amplitudes in the zx plane (Figs. 1 and 2).

In Ref. 8 the conventions are so chosen as to make the crossing matrix really diagonal. Replacing the indices τ_i of Ref. 8 by $\tilde{\lambda}_i$ (according to our present conventions), we have

$$(\langle p_3\tilde{\lambda}_3, p_4\tilde{\lambda}_4|\,T\,|p_1\tilde{\lambda}_1, p_2\tilde{\lambda}_2\rangle)_{\text{cntd}} = (-1)^{\eta}\, e^{i\pi(\tilde{\lambda}_1+\tilde{\lambda}_4)-i(\chi_1\tilde{\lambda}_1-\chi_2\tilde{\lambda}_2-\chi_3\tilde{\lambda}_3+\chi_4\tilde{\lambda}_4)}\,\langle P_3\tilde{\lambda}_3, P_1\tilde{\lambda}_1|\,T\,|P_4\tilde{\lambda}_4, P_2\tilde{\lambda}_2\rangle \tag{5.1}$$

(here η is an over-all phase factor).

The angles χ_i are given in Ref. 8 and additional remarks about the phase factors and the continuation path are given in the Appendix.

From (4.10) and (5.1) we obtain (with $\theta_4 = \pi + \theta_s$, $\theta_2' = \pi + \theta_t$)

$$(e^{-i(\pi\tilde{\nu}_2 - \tilde{\theta}_s\tilde{\nu}_3 - \tilde{\theta}_4)\tilde{\nu}_4}\,\langle p_3\tilde{\nu}_3, p_4\tilde{\nu}_4\,|\,T\,|p_1\tilde{\nu}_1, p_2\tilde{\nu}_2\rangle)_{\text{cntd}} = (-1)^{\eta}\, e^{i\pi(\tilde{\nu}_1+\tilde{\nu}_4)-i(\chi_1\tilde{\nu}_1-\chi_2\tilde{\nu}_2-\chi_3\tilde{\nu}_3+\chi_4\tilde{\nu}_4)}$$
$$\times\, e^{-i(-\pi\tilde{\nu}_1+\tilde{\theta}_t\tilde{\nu}_4+\tilde{\theta}_2'\tilde{\nu}_2)}\,\langle p_3\tilde{\nu}_3, p_1\tilde{\nu}_1|\,T\,|p_4\tilde{\nu}_4, p_2\tilde{\nu}_2\rangle\,. \tag{5.2}$$

For the O amplitudes, d matrices replace the exponentials, exactly as for the h amplitudes.

The kinematical significance of the angles in (5.2) may be seen as follows. Proceeding as in Ref. 8 [starting, for convenience, with case $P^2 = (p_3 - p_1)^2 = t > 0$], if we first apply the transformation

$$\Lambda(t) = e^{i\omega K_3}\, e^{i\underline{v}\cdot\underline{B}}, \qquad e^{\omega} = \sqrt{2}\,P_n/\sqrt{t}\,, \quad \underline{v} = \underline{P}/P_n \tag{5.3}$$

with

$$(P = p_{(3)} - p_{(1)}),$$

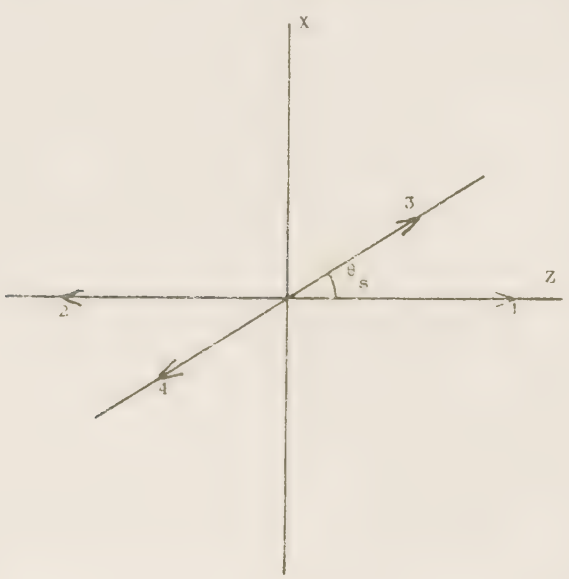


FIG. 1. s-channel center-of-mass frame. $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4$. (First configuration.)

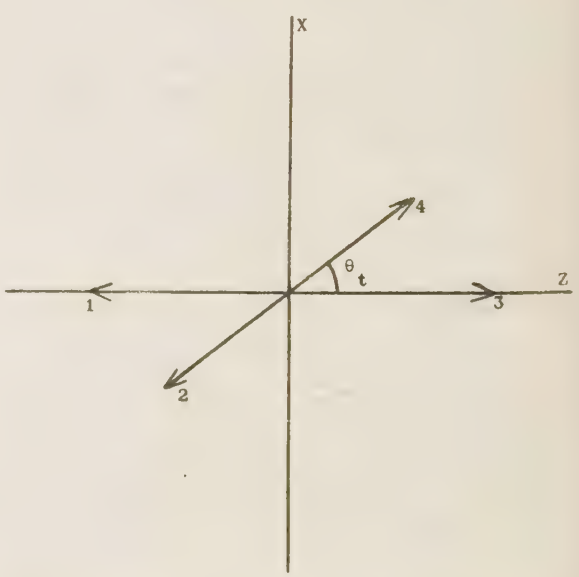


FIG. 2. t-channel center-of-mass frame. $\vec{p}_3 + \vec{p}_1 = \vec{p}_4 + \vec{p}_2$.

we obtain a zx plane amplitude with $p_1' = \Lambda_{(t)} \cdot p_i$ and $\nu_i' = \nu_i$. Then we have to apply a rotation around the y axis to attain the configuration of Fig. 2. This rotation alone gives the kinematical angles involved in (5.2).

Also, as compared to the result (2.27) of Ref. 8, we have for the O states,

$$[-p]_-^{-1} \times [-p]_+ = e^{\pm i(\pi/2)\tau_3} . \tag{5.4}$$

Noting the foregoing two points, we may derive directly the crossing matrix for O and trans-O amplitudes by proceeding as in Ref. 8.

Let us finally note that we again obtain very simple crossing relations for the O and trans-O amplitudes for the "Breit" frame introduced in Ref. 8. These may again be written down at once from the corresponding results for the h and trans-h amplitudes.[8]

VI. KINEMATICAL SINGULARITIES

The structure of kinematical singularities of the O amplitudes has several interesting aspects. It can be derived in many ways, e.g., from the known results for the h and trans-h amplitudes, or by using the crossing relations, or by directly using methods analogous to those of CTMN[14] or Trueman.[15] Instead of going into full details we will take *the case of unequal masses* as an example and will summarize the results with a few comments, comparing them with the corresponding results for other well-known amplitudes. The results have been verified by deducing them from different points of view.

Let us define the zx-plane *s-channel c.m. amplitudes* (Fig. 1):

$$M_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(s,t) = \langle p_3\nu_3, p_4\nu_4 | T | p_1\nu_1, p_2\nu_2 \rangle , \tag{6.1}$$

$$\mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(s,t) = (p_3\nu_3, p_4\nu_4 | T | p_1\nu_1, p_2\nu_2) , \tag{6.2}$$

corresponding to the states $|p_i, \nu_i\rangle$ [(2.2)] and $|p_i, \nu_i)$ [(2.3)], respectively. The corresponding trans-O amplitudes will be denoted, respectively, by $M_{\bar\nu_3\bar\nu_4,\,\bar\nu_1\bar\nu_2}(s,t)$ and $\mathfrak{M}_{\bar\nu_3\bar\nu_4,\,\bar\nu_1\bar\nu_2}(s,t)$.

The parameters p_i^0, $|\vec p_i|$, $\cos\theta_s$, $\sin\theta_s$ are expressed in terms of the invariants s, t by very well-known expressions.[8,14] The particle "i" has mass m_i and spin S_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

We will now examine the kinematical singularities in s for fixed t for the case of unequal masses. The following singularities are found for the amplitude (6.1). [The results for (6.2) are of course entirely similar. We will combine them at the end.]

(a) Physical region boundary. This boundary is given by $\Phi = 0$ where Φ is the well-known Kibble function.

As $\Phi \to 0$,

$$M_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(s,t) \to (\sin\theta)^{|\nu_1+\nu_2-\nu_3-\nu_4|} \hat M'_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(s,t)$$

or simply to

$$(\sqrt{\Phi})^{|\nu_1+\nu_2-\nu_3-\nu_4|} \hat M_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(s,t) , \tag{6.3}$$

where $\hat M'$ and $\hat M$ are regular at $\Phi = 0$.

An exactly similar result holds for the c amplitudes where we have (in evident notation)

$$M_{\sigma_3\sigma_4,\,\sigma_1\sigma_2}(s,t) \to (\sqrt{\Phi})^{|\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3-\sigma_4|} \times \hat M_{\sigma_3\sigma_4,\,\sigma_1\sigma_2}(s,t) . \tag{6.4}$$

These may be compared with the result for the h amplitudes

$$M_{\lambda_3\lambda_4,\,\lambda_1\lambda_2}(s,t) \to (\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{|\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3+\lambda_4|} \times (\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{|\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4|} \times \hat M_{\lambda_3\lambda_4,\,\lambda_1\lambda_2}(s,t) . \tag{6.5}$$

Thus for the O and c amplitudes, the results are even simpler than for the h amplitudes.

For the trans-O amplitudes, the situation here is complicated just as for the trans-h amplitudes.

(b) $s = 0$. Like the h amplitudes, the O amplitudes are also regular at $s = 0$. The same result then evidently holds for the trans-O amplitudes.

The c amplitudes are not, in general, regular at $s = 0$.

(c) Thresholds and pseudothresholds. It is known that the h amplitudes have complicated behavior at the points

$$s = (m_3 \pm m_4)^2 , \quad s = (m_1 \pm m_2)^2$$

and for trans-h amplitudes, one obtains factorizable singularities.

The O amplitudes can be shown to be regular at $s = (m_3 \pm m_4)^2$ (for the configuration of Fig. 1). The c amplitudes are regular at $s = (m_3 + m_4)^4$ and behave as $(p_j^0 + m_j)^{-s} j$ ($j = 4, 3$ as $m_3 \gtrless m_4$) at $s = (m_3 - m_4)^2$. Thus we have the simplest behavior for the O and trans-O amplitudes.

Let us now consider the points (for Fig. 1) $s = (m_1 \pm m_2)^2$. One convenient method of exhibiting a factorized singularity is to pass to the configuration of Fig. 3. If M and M' denote the amplitudes corresponding to the configurations of Figs. 1 and 3, respectively, we have the trans-O amplitudes:

$$M_{\bar\nu_3\bar\nu_4,\,\bar\nu_1\bar\nu_2}(s,t) = M'_{\bar\nu_3\bar\nu_4,\,\bar\nu_1\bar\nu_2}(s,t) \times e^{i(\bar\theta_1\bar\nu_1 + \bar\theta_2\bar\nu_2 - \bar\theta_3\bar\nu_3 - \bar\theta_4\bar\nu_4)} , \tag{6.6}$$

where

$$\sin\bar\theta_j = \frac{m_j \sin\theta}{p_j^0 \pm |p_j| \cos\theta} , \quad \cos\bar\theta_j = \frac{p_j^0 \cos\theta \pm |p_j|}{p_j^0 \pm |p_j| \cos\theta} , \tag{6.7}$$

where the "+" sign corresponds to $j = 1, 3$ and "−"

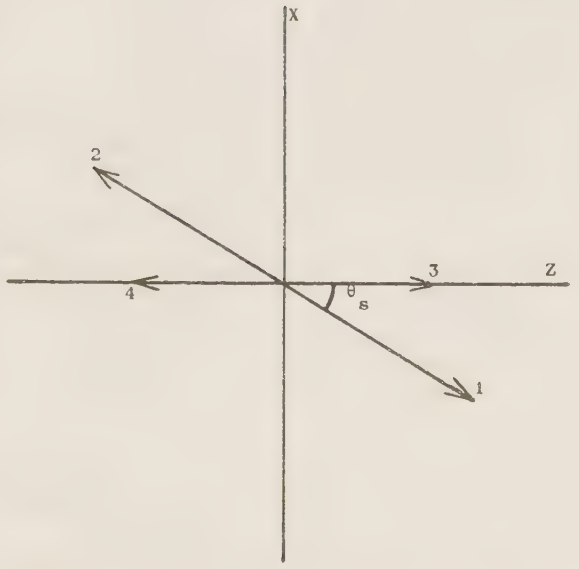


FIG. 3. s-channel center-of-mass frame. (Second configuration.)

sign to $j = 2, 4$. Now in (6.6) M' is regular at $s = (m_1 \pm m_2)^2$. Hence M behaves as the coefficient in (6.6) near these points.

For the trans-c amplitude the corresponding relation is simpler, namely,

$$M_{\vec{\sigma}_3\vec{\sigma}_4,\ \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}(s,t) = M'_{\vec{\sigma}_3\vec{\sigma}_4,\ \vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2}(s,t) \times e^{i\theta(\vec{\sigma}_1+\vec{\sigma}_2-\vec{\sigma}_3-\vec{\sigma}_4)}. \qquad (6.6')$$

In fact this amplitude is essentially the same as the xy-plane c amplitudes.[8] From (6.6) it can be deduced that

$$s_{12}^{(s_1+s_2)} M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(s,t), \qquad (6.8)$$

where

$$s_{ij} = \{[s-(m_i+m_j)^2][s-(m_i-m_j)^2]\}^{1/2},$$

is finite at $s = (m_1 \pm m_2)^2$.

A similar result holds for $\mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(s,t)$. Again, as regards branch-point behavior, it will be convenient to write the amplitudes using the parameters $\vec{p}_i$. We note that on turning once around the point $s_{12} = 0$,

$$M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) \to M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(-\vec{p}_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

and similarly

$$\mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) \to \mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(-\vec{p}_i). \qquad (6.9)$$

But for zx-plane amplitudes, using (4.11), we have

$$M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) = (-1)^{\Sigma_i(s_i+\nu_i)}\mathfrak{M}_{-\nu_3-\nu_4,\ -\nu_1-\nu_2}(-\vec{p}_i). \qquad (6.10)$$

For parity-conserving reactions, this is also [using (2.5)] equal to

$$\eta\,\mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(-\vec{p}_i), \qquad (6.11)$$

where $\eta = \prod_{i=1}^{4}\eta_i$, η_i being the intrinsic parity of the particle "i".

Let us define

$$M^{(\pm)}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) = [M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) \pm (-1)^{\Sigma_i(s_i+\nu_i)} \times \mathfrak{M}_{-\nu_3-\nu_4,\ -\nu_1-\nu_2}(\vec{p}_i)]. \qquad (6.12)$$

For parity-conserving reactions the right-hand side of (6.12) is equal to

$$[M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) \pm \eta\mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i)]; \qquad (6.13)$$

then on turning once around the point $s_{12} = 0$,

$$M^{(\pm)}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i) \to \pm M^{(\pm)}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(\vec{p}_i). \qquad (6.14)$$

(d) $p_{n(i)} = 0$, $p_{\bar{n}(i)} = 0$. As compared to the h and c amplitudes, the O amplitudes have a new type of kinematical singularity, due to the special role played by the parameters p_n and $p_{\bar{n}}$, respectively, in the definitions (2.2) and (2.3). But fortunately these are simple factorizable ones. Thus for the configuration of Fig. 1 singularities arise at the points $p_{n(i)} = 0$, $p_{\bar{n}(i)} = 0$ for $i = 3, 4$. The amplitudes

$$p_{n(3)}{}^{s_3} p_{n(4)}{}^{s_4} M_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(s,t)$$

and (6.15)

$$p_{\bar{n}(3)}{}^{s_3} p_{\bar{n}(4)}{}^{s_4} \mathfrak{M}_{\nu_3\nu_4,\ \nu_1\nu_2}(s,t)$$

are regular at these points.

Let us note that for

$$p_{n(j)} = 0 \text{ or } p_{\bar{n}(j)} = 0 \quad (j = 3, 4), \qquad (6.16)$$

$$\Phi = -m_j{}^2 s_{12}{}^2. \qquad (6.16')$$

Recently Leader and Pennington[16] have found it quite useful to treat the amplitudes as a function of the invariants s and n^2 (instead of s and t), where

$$n^2 = -\Phi/s^2. \qquad (6.17)$$

From (6.16') we note that if in modifying (6.17) we keep fixed

$$-\Phi/s_{12}{}^2, \qquad (6.18)$$

then (for the massive particles we are considering) the points (6.16) cannot be attained. For large s, $s_{12}{}^2 \to s^2$. This gives a kinematical motivation for the choice of the denominator in (6.18).

(e) Regularized O amplitudes. We start with the two amplitudes $M_{\nu_i}(\vec{p}_i)$ and $\mathfrak{M}_{\nu_i}(\vec{p}_i)$ [(6.1), (6.2)]. Putting together the foregoing results [and noting the behavior of the factors $p_{n(3,4)}$, $p_{\bar{n}(3,4)}$ in (6.15) for $s \to 0$ and $s_{12} \to 0$], we obtain the following two regularized combinations:

$$\Phi^{-|\nu_1+\nu_2-\nu_3-\nu_4|/2}\, S_{12}^{(S_1+S_2+S_3+S_4+\epsilon_+)_S(S_3+S_4)/2}$$

$$\times\left[p_{n(3)}{}^{S_3}\, p_{n(4)}{}^{S_4}\, M_{\nu_3\nu_4,\,\nu_1\nu_2}(\vec{p}_i)\right.$$

$$\left.\pm\, p_{\bar{n}(3)}{}^{S_3}\, p_{\bar{n}(4)}{}^{S_4}(-1)^{\Sigma_i(S_i+\nu_i)}\mathfrak{M}_{-\nu_3-\nu_4,\,\cdots}(\vec{p}_i)\right], \tag{6.19}$$

where,

$$\text{for } \sum_i S_i = 2n, \quad \epsilon_+ = 0, \quad \epsilon_- = 1,$$

and (6.20)

$$\text{for } \sum_i S_i = 2n+1, \quad \epsilon_+ = 1, \quad \epsilon_- = 0.$$

For parity-conserving reactions we may use (6.11) to substitute $\eta\mathfrak{M}_{\nu_i}(\vec{p}_i)$ in the second term of (6.19).

Thus finally we see that for the general mass case we have discussed, the O amplitudes can be regularized quite easily. In fact the results are simpler than for the h amplitudes and *do not fail for the case* $BF \sim B'F'$ (as in the case for h amplitudes). We did not even assume parity conservation in (6.19).

The fact that we are using [in (6.19)] a combination of the amplitudes M_{ν_i} and $\mathfrak{M}_{\nu_i}$ causes no special inconvenience. Since compact and analogous transformation formulas [(2.17), (2.22)] are available for both types of states, such a combination can be handled as easily, say, as the combination of two h amplitudes. However, if we want to, for some particular reason, express one type of O amplitude as a linear combination of the other type, it can be done using (4.11′).

(f) Elastic πN scattering. When the masses are not all unequal, several particular cases of importance arise. Since the O amplitudes for all such cases can be treated easily by starting from known results for other amplitudes, instead of listing all the possibilities systematically, we will only briefly consider the important case of elastic πN scattering.

In Fig. 1 the particles 1 and 3 are now pions (mass μ) and particles 2 and 4 are nucleons (mass m). For the helicity amplitudes one has[14]

$$H_{++} = H_{--} = (\cos\tfrac{1}{2}\theta_s)F_1,$$
$$H_{+-} = -H_{-+} = \frac{1}{\sqrt{s}}(\sin\tfrac{1}{2}\theta_s)F_2, \tag{6.21}$$

where in terms of the well-known invariant amplitudes A and B,

$$F_1 = A + B\,\frac{s-m^2-\mu^2}{2m},$$
$$F_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{A}{m}(s+m^2-\mu^2) + B(s+\mu^2-m^2)\right]. \tag{6.22}$$

Denoting the amplitudes $M_{\nu_3 0,\,\nu_1 0}$ and $\mathfrak{M}_{\nu_3 0,\,\nu_1 0}$ by $O_{\nu_3\nu_1}$ and $O'_{\nu_3\nu_1}$, respectively, we have [from (4.2) and (4.12), with $\varphi = \pi + \theta_s$ and $\varphi' = \pi + \theta'_s$]

$$O_{\nu_3\nu_1} = H_{\lambda_3\lambda_1}\, d^S_{\nu_3\lambda_3}(\bar{\varphi})(-1)^{S+\nu_1}\delta_{\nu_1,\,-\lambda_1},$$
$$O'_{\nu_3\nu_1} = H_{\lambda_3\lambda_1}\, d^S_{\nu_3\lambda_3}(\bar{\varphi}')(-1)^{S+\nu_1}\delta_{\nu_1,\,-\lambda_1}. \tag{6.23}$$

Thus the singularities due to the half-angles $[\frac{1}{2}\theta_s$ in (6.21)] are eliminated while those due to $p_{n(3)}$ and $p_{\bar{n}(3)}$ are introduced.

VII. REDUCTION OF DIRECT PRODUCTS AND PARTIAL-WAVE ANALYSIS

In this section we will briefly indicate the relation of the present formalism to certain known techniques for reduction of direct products of states and partial-wave expansions of scattering amplitudes.

For massive particles two well-known methods of reduction employ l-s and helicity coupling, respectively. Moussa and Stora[6] have given results for these two couplings *valid for arbitrary tetrads*. Let us take the direct product $|p_1, \nu_1\rangle \times |p_2, \nu_2\rangle$. For simplicity we will consider c.m. frame, namely, $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{P} = 0$.

Let us start with the l-s coupling. Using the general result of Ref. 6 (Sec. II, a, 5) and adopting their notation, one finds that the calculation of the coupling coefficients

$$\langle [p_1], \nu_1; [p_2], \nu_2 | [P], \nu, j, l, s, P^2\rangle \tag{7.1}$$

for the states $|p, \nu\rangle$ [or similarly for $|p, \nu)$] amounts to first transforming them to the c-states [using (4.6)], and then using l-s coupling for the c-states. This corresponds to the fact that the l-s coupling arised naturally for the c-states and has the simplest expression for them.

For a similar reason the general result for helicity coupling[6] applied to $|p_1\nu_1, p_2\nu_2\rangle$ amounts to transforming $|p_i, \nu_i\rangle$ to $|p_i, \lambda_i\rangle$ [using (4.2)] and then using the standard result for the helicity states. The above two couplings may then of course be utilized as usual to expand the O amplitudes in the conventional l-s or helicity partial waves.

A particularly interesting application of O states is in crossed-channel partial-wave analysis for lightlike momentum transfer.[3] In this formalism, instead of the usual direct- (s-)channel partial-wave analysis of

$$\langle p_3\nu_3, p_4\nu_4 | T | p_1\nu_1, p_2\nu_2\rangle,$$

one reduces the direct products

$$|p_3\nu_3, -p_1\nu_1\rangle$$

and

$$|-p_4\nu_4, p_2\nu_2\rangle$$

for the case

$$t = (p_3 - p_1)^2 = (p_2 - p_4)^2 = 0. \quad (7.2)$$

The result can be found in Ref. 3 and the partial waves correspond effectively to Fourier-Bessel transforms.

So far we have been considering partial-wave expansions starting from reduction of the direct products of states and the use of the language of little groups. More general types of expansions of amplitudes are nowadays often introduced. For example, a generalization of the above-mentioned crossed-channel expansion for $t \neq 0$ (but for spin-0 particles) is given in Ref. 4.

In fact if we do not insist on an interpretation through reduction of direct product of states and little groups, various types of partial-wave expansions can formally be introduced (for arbitrary values of the momenta) by using the orthogonality properties of different functions (such as Bessel functions which are useful for studying certain models). In these types of expansions, certain necessary integrability properties are to be postulated.

One way of introducing group-theoretical expansions is to parametrize the amplitude by certain transformations of the Lorentz group (which serve to bring the momenta to suitably chosen standard values) and then expand the amplitude as a function of those transformation parameters.[17] Without going into any detail, let us just note some agreeable properties of the O amplitudes concerning such parametrizations. These are consequences of the simple action of the generators $\underline{B}$, K_3, and J_3 as given in (2.17) and the fact that a 4-momentum p can be brought to any arbitrary value p' (with $p'^2 = p^2$) by a transformation of the type

$$U(\Lambda) = e^{-i\underline{v}\cdot\underline{B}} e^{-i\omega K_3}, \quad (7.3)$$

with suitable values of $\underline{v}$ and ω.

Thus, for example, to start with, one may write

$$\langle p_3\nu_3, p_4\nu_4 | T | p_1\nu_1, p_2\nu_2 \rangle = \langle p_3'\nu_3, p_4'\nu_4 | U(\Lambda_{34}) T U(\Lambda_{12}^{-1}) | p_1'\nu_1, p_2'\nu_2 \rangle, \quad (7.4)$$

where Λ_{12}, Λ_{34} are independent transformations of the type (7.3) such that

$$\Lambda_{12}(p_1, p_2) = (p_1', p_2'), \quad \Lambda_{34}(p_3, p_4) = (p_3', p_4'). \quad (7.5)$$

Then

$$\langle p_3\nu_3, p_4\nu_4 | T | p_1\nu_1, p_2\nu_2 \rangle = \langle p_3'\nu_3, p_4'\nu_4 | T U(\Lambda) | p_1'\nu_1, p_2'\nu_2 \rangle, \quad (7.6)$$

where $\Lambda = \Lambda_{34} \cdot \Lambda_{12}^{-1}$.

In particular we may choose $\Lambda_{12} = \Lambda_{34}$ such that

$$p_1' + p_2' = p_3' + p_4' = 0$$

to relate the c.m. amplitude in a *one-to-one fashion* to amplitudes for arbitrary values of $P = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$.

More generally one can choose Λ_{12}, Λ_{34} so as to reduce, for example, $p_1 - p_2$ and $p_3 - p_4$ to suitably chosen standard values. For xy-plane amplitudes we can further use J_3 to rotate the whole configuration, introducing only a phase factor.

We can exploit this simplicity also in the reduction of direct products (many particle states) in calculating coefficients of the type

$$\langle p, \nu, \zeta | p_1, \nu_1, \ldots, p_n, \nu_n \rangle \quad (7.7)$$

(ζ denotes possible extra parameters which we need not specify for the moment, but which are supposed to have been expressed in an invariant way).

Let $U(\Lambda)$ be given by (7.3) and $\Lambda \cdot p = p'$ and $\Lambda p_i = p_i'$; then for arbitrary values of p_i,

$$\langle p, \nu, \zeta | p_1, \nu_1, \ldots, p_n\nu_n \rangle = \langle p', \nu, \zeta | p_1', \nu_1, \ldots, p_n'\nu_n \rangle. \quad (7.8)$$

Thus, for example, we can directly relate high-energy Clebsch-Gordan coefficients to the c.m. ones (where $\vec{p} = 0$) without introducing superpositions. This simplicity is not obtained for h or c states.

VIII. REMARKS

The Galilean subgroup of the Poincaré group plays a basic role in null-plane formalism, which is of interest in high-energy processes, and leads naturally to a definition of spin projection which we have studied at length. We have tried to point out many interesting properties of the O states and O amplitudes. We have concentrated on the study of massive particles since a smooth limit to zero mass leads directly to well-known description in terms of the little group E_2.

For helicity projection, one diagonalizes effectively the projection of W on a timelike vector $(1, 0, 0, 0)$. For O projection, one diagonalizes the projection of W on a lightlike vector $(1, 0, 0, \pm 1)/\sqrt{2}$. Similarly one may also study the projection of W on a spacelike vector, say, $(0, 0, 0, 1)$, for physical particles (and not only for $p^\mu p_\mu < 0$ where it is

known). Now that not only do we have many interesting models for amplitudes, but also direct experimental determination of certain important cases are becoming possible,[18] a systematic comparison of the properties of different amplitudes (for both direct and crossed channels) may become of interest. Different amplitudes may provide a relatively simple description under different conditions. We hope to study these aspects more thoroughly elsewhere.

APPENDIX: PHASE FACTORS IN CROSSING RELATIONS

In Ref. 8 we did not give the explicit form of the overall phase factor η. Concerning this point it is interesting to compare the results of Ref. 8 with the corresponding ones of other authors, using the crossing relations for center-of-mass helicity amplitudes which have been studied by many.

The crossing relations for the helicity amplitudes corresponding to (5.1) is given in Ref. 8 as

$$\langle p_3\lambda_3, p_1\lambda_4|T|p_1\lambda_1, p_2\lambda_2\rangle_{\text{cntd}} = e^{i\pi(\eta)}e^{i\pi(\lambda_1'-\lambda_4')}\langle p_3\lambda_3', p_1\lambda_1'|T|p_1\lambda_1', p_2\lambda_2'\rangle \times d^{S_1}_{\lambda_1'\lambda_1}(\chi_1)d^{S_2}_{\lambda_2'\lambda_2}(-\chi_2)d^{S_3}_{\lambda_3'\lambda_3}(\chi_3)d^{S_4}_{\lambda_4'\lambda_4}(-\chi_4)\,. \tag{A1}$$

This corresponds exactly to (12) of Hara[19] upon making the correspondence

$$(A, B, C, D) \to (2, 4, 1, 3),$$

if we put (with $\epsilon = -1$ for $F+B \to B+F$ and $B+F \to F+B$ processes)

$$e^{i\pi(\eta)} = \epsilon\, e^{i\pi 2S_3}\,. \tag{A2}$$

The factor ϵ can be obtained explicitly in our formalism by choosing the negative sign in (2.27) of Ref. 8 in agreement with the continuation procedure of Hara.

Comparing with the result of CTMN,[14] noting that their χ_3 and χ_4 have opposite signs, we find apart from the condition

$$e^{i\pi\eta} = e^{i\pi[\sigma(p)+2S_4]}, \tag{A3}$$

an extra helicity-dependent phase factor

$$e^{i\pi(\lambda_1'-\lambda_2'+\lambda_3'-\lambda_4')}\,. \tag{A4}$$

The origin of this factor is easily traced. It represents a rotation π about the n_3 axis and is a consequence of the fact that their n_2 axis (W_S in their notation) acquires a negative sign after continuation (this axis being common to all the particles). Our formalism implicitly defines the n_2 axis in the t channel with such an additional rotation, which is not only quite legitimate (amounting to a choice of phase conventions for the states), but has the additional advantage of making the transversity crossing relation really diagonal. In the CTMN[14] formalism the transversity indices have the crossing property

$$\tau_i \to -\tau_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

As compared to the original derivation of Trueman and Wick,[20] there are again several differences concerning phase factors (e.g., convention regarding "particle 2" and behavior of helicity states under crossing) [see Eqs. (3.13), (3.14) of Ref. 8.]

In fact, in our formalism (referring now to equations in Sec. II of Ref. 8) if we put Eq. (2.40) directly into (2.25) [using, like CTMN, the result of Bros, Epstein, and Glaser, so that their $\sigma(p) = \eta'$] we obtain finally,

$$\eta = \sigma(p) + 2(S_1 + S_4)\,. \tag{A5}$$

This is to be compared with (A2) and (A3). In our case (A5) the crossed particles play a symmetrical role (1 and 4) as do the uncrossed ones. It is to be noted that we have directly followed the relevant 2×2 matrices [(2.25)–(2.27) of Ref. 8] in the process of continuation, whereas CTMN follow the helicity frames, which necessitates a separate determination of η.

---

[1](a) J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. D 1, 2901, 1970. (b) R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuovo Cimento 1A, 625 (1971); Phys. Rev. D 3, 1692 (1971). Other references are quoted in the preceding ones. Applications to parton models are given in J. D. Bjorken, J. B. Kogut, and D. E. Soper [Phys. Rev. D 3, 1382 (1971)] and C. Bouchiat, P. Fayet, and Ph. Meyer [Nucl. Phys. B34, 157 (1971)].

[2](a) H. Bacry and N. P. Chang, Ann. Phys. (N.Y.) 47, 407 (1968). (b) D. E. Soper, Phys. Rev. D 5, 1956 (1972); SLAC Report No. 137, 1971 (unpublished). Such spin states are also defined by K. Bardakci and G. Segrè, Phys. Rev. 159, 1263 (1967). For use of null-plane coordinates in a study of precession of polarization see A. Chakrabarti, Nuovo Cimento 56A, 604 (1968).

[3]J. F. Boyce, R. Delbourgo, A. Salam, and J. Strathdee, Trieste Report No. IC/67/9, 1967 (unpublished).

[4]P. Winternitz, Ya. A. Smorodinsky, and M. B. Sheftel, Yad. Fiz. 7, 1325 (1968) [Sov. J. Nucl. Phys. 7, 785 (1968)].
[5]L. Michel, Nuovo Cimento Suppl. 14, 95 (1959).
[6]P. Moussa and R. Stora, in *Proceedings of the 1966 International School of Elementary Particle Physics, Herceg-Novi, Yugoslavia,* edited by M. Nikolic (Gordon and Breach, New York, 1968).
[7](a) A. Chakrabarti, Nuovo Cimento 43, 576 (1966) (Appendix A). (b) A. Chakrabarti, Univ. of Paris thesis, 1965 (unpublished), where other references can be found.
[8]A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 11, 1085 (1970).
[9]A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 7, 949 (1966).
[10]A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 12, 1813 (1971).
[11]H. Joos, Fortschr. Phys. 10, 65 (1962); A. Chakrabarti, J. Math. Phys. 4, 1215 (1963); 5, 1747 (1964) (Appendix A).
[12]These coincide with the solutions given in Ref. 1(a) apart from normalization factors.
[13]M. Jacob and G. C. Wick, Ann. Phys. (N.Y.) 7, 404 (1959).
[14]G. Cohen-Tannoudji, A. Morel, and H. Navelet (CTMN), Ann. Phys. (N.Y) 46, 239 (1968), and references cited therein. Other important references are quoted in Ref. 8.
[15]T. L. Trueman, Phys. Rev. 173, 1684 (1968).
[16]E. Leader and M. R. Pennington, LBL Report No. LBL-1042, 1972 (unpublished).
[17]An example and important references are given in Ref. 16.
[18]A. de Lesquen *et al.*, Phys. Lett. 40B, 277 (1972); G. Cozzika *et al.*, *ibid.* 40B, 281 (1972).
[19]Y. Hara, Prog. Theor. Phys. 45, 584 (1971).
[20]T. L. Trueman and G. C. Wick, Ann. Phys. (N.Y) 26, 322 (1964).

REFERENCES

[1] S. Weinberg, Phys. Rev. 150, 1313 (1966).

[2] S. Chang and S. Ma, Phys. Rev. 180, 1506 (1969).
H. Cheng and T. Wu, Phys. Rev. 182, 1852 (1969).

[3] L. Susskind, Phys. Rev. 165, 1535 (1968) et dans "Lectures in Theoretical Physics", Vol. XI.D, Mathematical Methods in Theoretical Physics, edited by K. T. Mahanthappa and W. E. Brittin (Gordon and Breach, N. Y. 1969).

K. Bardacki and M. B. Halpern, Phys. Rev. 176, 1686 (1968).

[4] J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. D1, 2901 (1970).

[5] R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuovo Cimento 1A, 625 (1971).

R. A. Neville, Ph. D. Thesis, Syracuse University (Août 1968).

[6] J. D. Bjorken, J. B. Kogut and D. E. Soper, Phys. Rev. D3 ,1382 (1971).

[7] J. Bjorken, Proceedings of the international School "Enrico Fermi", Course 41, ed. J. Steinberger, Ac. Press (N. Y.) 1967.

J. Bjorken and E. A. Paschos, Phys. Rev. 185, 1975 (1969).

R. P. Feynman, Invited paper at the third topical conference in high energy collisions of hadrons, Stony Brook, N.Y. Sept. 1969 ; et Phys. Rev. Letters 23, 1415 (1969)

[8] C. Bouchiat, P. Fayet et P. Meyer, Nucl. Phys. B 34, 157 (1971).

[9] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. 96, 191, (1954).

[10] S. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1068 (1973).

[11] J. Schwinger, Phys. Rev. 74, 1492 (1948), S. Tomonaga, Progress Theor. Phys. 1, 27 (1946).

[12] S. Fubini, A. J. Hanson and R. Jackiw, Phys. Rev. D7, 1732 (1973).

[13] T. M. Yan, Phys. Rev., D7, 1780 (1973).

[14] P. W. Higgs, Phys. Rev. 145, 1156 (1966).
T. W. B. Kibble, Phys. Rev. 155, 1554 (1967).

[15] W. Heitler, The quantum theory of radiation, 3rd ed. (Oxford U. P. New York 1966).

[16] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. 25B, 29 (1967).

[17] G.'t Hooft, Nucl. Phys. B33, 173, B35, 167 (1971).

[18] G.'t Hooft and M. T. Veltman, Utrecht Report, 1972 (non publié).

[19] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, D7, 1049 (1973) et références à l'intérieur.

[20] C. Bouchiat, P. Fayet et N. Sourlas, Lett. Nuovo Cimento 4, 9, (1972).

[21] G. 't Hooft and M. T. Veltman, Nucl. Phys. B 44, 189 (1972).

[22] L. Michel, Nuovo Cimento, Supp. 14, 95 (1959).
P. Moussa and R. Stora, Proceedings of the Hercegnovi Summer School (1966) (Ed. Gordon and Breach).

[23] S. J. Chang and T. M. Yan, Phys. Rev. D7, 1147 (1973).

[24] S. Weinberg, Phys. Rev. Letters 19, 1264 (1967).

[25] P. Fayet, Thèse, Orsay (1972).

[26] W. A. Bardeen, R. Gastmans and B. Lautrup, Nucl. Phys. B46, 319 (1972)

***